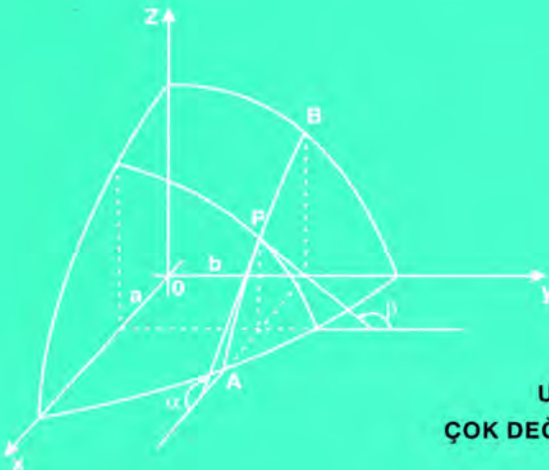
Prof. AHMET A. KARADENİZ

YÜKSEK MATEMATİK

CİLT 2

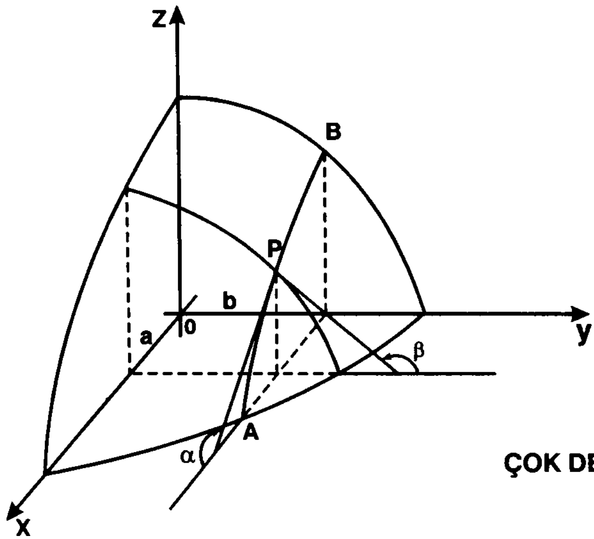


SERİLER
FOURİER SERİLERİ
KOMPLEKS SAYILAR
UZAY ANALİTİK GEOMETRİ
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Çağlayan Kitabevi
Beyoğlu - İSTANBUL

Prof. AHMET A. KARADENİZ

YÜKSEK MATEMATİK



CİLT 2

SERİLER

FOURİER SERİLERİ

KOMPLEKS SAYILAR

UZAY ANALİTİK GEOMETRİ

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Çağlayan Kitabevi

Galatasaray, İstiklal Cad. 166 Tokatlıyan İş Hanı
K.1 / 7 - 8 - 9 34435 Beyoğlu - İstanbul
Tel: 0212 245 44 33 pbx Faks: 0212 249 17 94
info@caglayan.com www.caglayan.com

Dokuzuncu Baskı
2007

ISBN: 975-436-065-0

Basıldığı Yer:
ÇAĞLAYAN BASIMEVİ
Cağaloğlu, Çatalçeşme Sok. No: 26/3-4 İSTANBUL

İÇİNDEKİLER

16. BÖLÜM

SERİLER

17. BÖLÜM

FOURİER SERİLERİ

18. BÖLÜM

KOMPLEKS SAYILAR

19. BÖLÜM

UZAY ANALİTİK GEOMETRİ

20. BÖLÜM

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

16. BÖLÜM

SERİLER

16.1. Genel tanımlar.

16.1 - 1. Tanım.

Bir Kanunla birbirine bağlı sayılar dizisinin verilmiş toplamına seri denir.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots . + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

$$a + ar + ar^2 + \ldots . + ar^{n-1} + \ldots$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 \qquad (1)$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

ifadeleri birer seri örneği teşkil ederler.

Bir seride terimlerin sayısı sonlu ise seriye *sonlu seri;* terimlerinin sayısı sonsuz ise seriye *sonsuz seri* denir. Yukarıdaki örneklerden yalnız (1) serisi sonlu seri; diğerleri sonsuz serilerdir. Biz bu bölümde genellikle sonsuz serileri inceleyeceğiz.

Bir sonsuz seri

$$u_1 + u_2 \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

şeklinde gösterilir. Burada u_n serinin *genel terimi* adını alır. Bu terim serinin terimlerinin oluşum kanununu verir. Serideki bir terim, ekseriya, genel terimde n yerine terim numarasını koymak suretile elde edilebilir.

ÖRNEK 1. $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \ldots$ serisinin genel terimini yazınız.

Bu serinin genel terimi

$$u_n = \frac{n+2}{n\,(n+1)}$$

şeklindedir. Buna göre seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\,(n+1)}$$

şeklinde de gösterilebilir.

ÖRNEK 2. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \ldots$ serisinin genel terimini yazınız.

Genel terim $u_n = \frac{2n-1}{2n}$ olup seri

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \ldots + \frac{2n-1}{2n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$$

şeklinde gösterilebilir.

ÖRNEK 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisinin ilk dört terimini yazınız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

16.1 - 2. Bir serinin yakınsak veya ıraksaklığı.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

verilmiş olsun.

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{n=1}^{n} u_n$$

toplamlarına serinin *kısmî toplamları* denir. S_n kısmî toplamı serinin ilk n teriminin toplamıdır.

Bir sonsuz serinin S_n kısmî toplamının bir limiti mevcutsa yani

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ise seriye *yakınsak seri* ve bu limite *serinin toplamı* denir. Limit mevcut değilse seri, *ıraksak seri* adını alır.

ÖRNEK 1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ serisi ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan bir geometrik seri olup

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{2}{2^n}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

dir. Buna göre seri yakınsak ve toplamı $S = 2$ dir.

ÖRNEK 2. $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$ serisinde

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

olup

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$$

olarak mevcut değil ve dolayısile seri ıraksaktır.

ÖRNEK 3. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ serisinde n çift olursa $S_n = 0$ ve n tek olursa $S_n = 1$ olup

$$\lim_{n \to \infty} S_n$$

mevcut değil ve dolayısile seri ıraksaktır. *(Salınan seri).*

TEOREM 1. Bir serinin baştarafına sonlu sayıda herhangi terimler ilâve etmek veya baştarafından sonlu sayıda terimler atmakla serinin karakteri (yakınsak veya ıraksaklığı) değişmez.

İspat : $u_1 + u_2 + \ldots$ serisi $v_1 + v_2 + \ldots$ serisinin baştarafından $v_1, v_2, \ldots, v_k$ terimlerinin atılmasiyle elde edilmiş bir seri olsun. Bu takdirde $u_n = v_{k+n}$ olup

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = v_{k+1} + v_{k+2} + \ldots + v_{k+n}$$
$$s_n = S_{k+n} - S_k$$

elde edilir. Buradan, S_n in bir limitinin mevcut olması halinde s_n in de limitinin mevcut olacağı ve dolayısile v serisi yakınsak ise u serisinin de yakınsak olacağı; S_n in bir limiti mevcut değilse s_n in de limitinin mevcut olmayacağı ve dolayısile v serisinin ıraksak olması halinde u serisinin de ıraksak olacağı gösterilmiş olur.

TEOREM 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *serilerinin her ikisi de yakınsak ve* k *herhangibir sayı ise :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} k\, u_n \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \mp v_n)$$

serileri de yakınsak ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} k\, u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

dir. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *ıraksak ve* $k \neq 0$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} k\, u_n$ *de ıraksaktır.*

İspat :

$$\sum_{i=1}^{n} k\, u_i = k \sum_{i=1}^{n} u_i$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i \pm v_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i \pm \sum_{i=1}^{n} v_i$$

yazılabilir. Bu ıfadelere limit teoremleri uygulanırsa yukarıdaki sonuçlar elde edilir.

TEOREM 3. n artarken asla azalmayan ve sabit bir A sayısından daima daha küçük kalan bir S_n *değişkeni, n in sınırsız olarak artması halinde A dan büyük olmayan bir limite yaklaşır.*

İlerideki bazı teoremlerin ispatı için kullanacağımız bu teoremin ispatını vermeyeceğiz.

16.1 - 3. Yakınsaklık için gerekli şart.

TEOREM. Yakınsak bir seride

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

dır.

İspat : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ yakınsak bir seri olsun.

$$S_n = S_{n-1} + u_n$$

ve buradan

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

yazılabilir. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi yakınsak olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad , \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

bulunur.

Bu şart yakınsaklık için gerekli bir şart olmakla beraber, serinin yakınsak olabilmesi için yeter değildir. Buna göre teoremin karşıtı doğru değildir; yani, genel terimi sıfıra yaklaşan bir serinin daima yakınsak olduğunu iddia edemeyiz. Örneğin ilerde ıraksak olduğunu ispat edeceğimiz $u_n = \frac{1}{n}$ serisinde de u_n in limiti sıfırdır.

Ancak, bir seride $n \to \infty$ halinde u_n sıfıra yaklaşmıyorsa, bu serinin ıraksak olduğu söylenir.

ÖRNEK 4. Genel terimi $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ olan bir seri için

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

olup seri ıraksaktır.

16.1 - 4. Geometrik seri.

TEOREM. $u_n = a\,r^{n-1}$ $(a \neq 0)$ geometrik serisi $|r| \geq 1$ halinde ıraksak; $|r| < 1$ halinde yakınsak ve toplamı

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

dir.

İspat : Bir geometrik serinin ilk n teriminin S_n toplamı, $r \neq 1$ olarak,

$$S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

dir.

1) $|r| < 1$ ise :

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n \qquad \text{ve} \qquad \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

olarak seri yakınsak ve toplamı

$$S = \frac{a}{1-r}$$

dir.

2) $r = +1$ ise $u_n = a \neq 0$ olarak seri ıraksaktır.

3) $r = -1$ ise $|u_n| = a \neq 0$ olarak seri ıraksaktır.

4) $|r| > 1$ ise $\lim_{n\to\infty} u_n \to \infty$ olup genel terim sıfıra yaklaşmıyor ve dolayısile seri ıraksaktır.

16.2 - Pozitif terimli serilerin karakterlerinin belirtilmesi için kurallar.

Geometrik seride olduğu gibi, her seri için S_n toplamını veren bir ifade bulmak mümkün değildir. Bu nedenle, bütün serilerin yakınsaklık ve ıraksaklıklarını, S_n toplamının limitinin mevcut olup olmadığını araştırmak yolu' ile belirtemeyiz. Bu zorluk, serilerin karakterlerinin belirtilebilmesi için bazı kuralların bulunması zorunluğunu ortaya atmıştır. Biz de şimdi pozitif terimli serilere ait kurallardan bazılarını inceleyeceğiz.

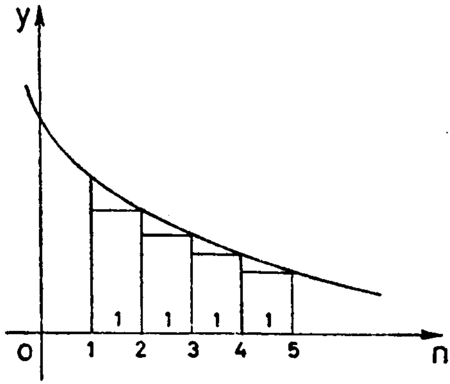
16.2 - 1. Integral kuralı.

TEOREM. İkinciden itibaren her terimi, kendisinden önce gelenden daha küçük ve genel terimi $f(n)$ olan pozitif terimli bir seride $n \geq 1$ için $f(n)$ pozitif, azalan ve sürekli ise :

$$\int_1^\infty f(n)\, dn$$

integrali mevcut olduğu zaman seri yakınsak; mevcut olmadığı zaman seri ıraksaktır.

İspat : $y = f(n)$ fonksiyonunun eğrisi Şekil. 144-a da gösterilen eğri olsun. $n = 1, 2, 3, \dots, k$ değerlerinin herbirinden on eksenine dikmeler çıkalım ve şekildeki dikdörtgenleri teşkil edelim. Dik dörtgenlerin sayısı $k-1$ dir. $k-1$ dik dörtgenin alanları toplamı serinin $S_k - S_1$ toplamını verir ki bu toplam $n=1, n=k$, $y=0$ doğruları ve $y = f(n)$ eğrisi ile sınırlanan alandan küçüktür. Buna göre :

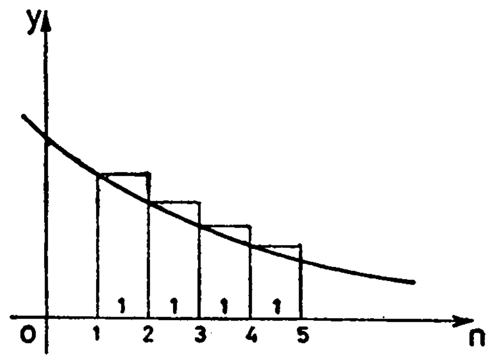


Şekil : 144-a

$$S_k - S_1 = \sum_{n=2}^{k} f(n) < \int_1^k f(n)\, dn$$

yazılabilir. k sınırsız artarken $\int_1^k f(n)\, dn$ integrali mevcut ise, $S_k - S_1$ daima bu integralin değerinden küçük kalır. $S_k - S_1$ toplamı k ile beraber arttığından ve daima belli bir sayıdan küçük kaldığından bir limite yaklaşır. (bak. 16.1 - 2. *TEOREM 3.*) Dolayısile de seri yakınsak olur.

Integralin mevcut olmaması halinde de, Şekil 144-b den



Şekil : 144-b

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) > \int_1^{n+1} f(n)\, dn$$

olarak $S_n \to \infty$ ve dolayısile seri ıraksaktır.

ÖRNEK 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n} + ..$$

serisinin karakterini belirtiniz. *(Harmonik Seri)*

Integral kuralının şartları bu seri için mevcuttur. Buna göre

$$\int_1^\infty f(n)\, dn = \int_1^\infty \frac{dn}{n} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dn}{n}$$

$$= \lim_{A\to\infty} |\log n| = \lim_{A\to\infty} \log A \to \infty$$

olup integral mevcut değildir. O halde ***harmonik seri ıraksaktır.***

ÖRNEK 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

serisinin karakterini belirtiniz. *(p serisi)*

$p \neq 1$ kabul ediyoruz. $p = 1$ halinde seri harmonik seri olur ki bunu da Örnek 1 de incelemiştik.

Integral kuralının şartları bu seri için de mevcuttur. Buna göre

$$\int_1^\infty f(n)\, dn = \int_1^\infty \frac{dn}{n^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dn}{n^p}$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left| \frac{1}{1-p} \frac{1}{n^{p-1}} \right|_1^A = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} \frac{1}{A^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \right]$$

dir.

$p - 1 < 0$ yani $p < 1$ ise $\frac{1}{A^{p-1}} \to \infty$ olarak limit ve dolayısile integral mevcut olmaz. Bu sebeple de seri ıraksak olur.

$p - 1 > 0$ yani $p > 1$ ise $\frac{1}{A^{p-1}} \to 0$ olarak integral mevcut ve seri yakınsak olur.

Bu sonuçlara göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

serisi (p serisi) $p > 1$ *ise yakınsak;* $p \leq 1$ *ise ıraksaktır.*

16.2 - 2. Mukayese kuralı.

TEOREM. Bütün terimleri pozitif sabitlerden ibaret olan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

serileri verilmiş olsun.

Eğer, a_n *serisi yakınsak ve* u_n *serisindeki her terim,* a_n *serisindeki karşılığı olan terimden küçük veya ona eşitse,* u_n *serisi de yakınsaktır.*

Eğer a_n *serisi ıraksak ve* u_n *serisindeki her terim,* a_n *serisindeki karşılığı olan terimden büyük veya ona eşitse,* u_n *serisi de ıraksaktır.*

İspat : a_n serisi yakınsak; $u_n < a_n$ ve

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} S_n = A \; ;$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

olsun. Hipotezden ötürü $s_n \leq S_n$ dir. a_n serisi pozitif terimli bir seri olduğundan, n arttıkça S_n asla azalmaz ve $S_n \leq A < A + 1$ olur. Buna göre de $s_n < A + 1$ olacaktır. u_n serisi de pozitif terimli bir seri olduğundan s_n, n ile birlikte artar. Diğer taraftan s_n daima $A + 1$ den küçük kaldığına göre $A + 1$ den büyük olmayan bir limite yaklaşır. (bak. 16. 1-2. *TEOREM 3.*) Buna göre de u_n serisi yakınsak olur.

a_n ıraksak ise S_n in bir limiti mevcut olmayacak ve hipotezden ötürü $s_n \geq S_n$ olacağına göre s_n de bir limite yaklaşamayacak ve u_n de ıraksak olacaktır.

ÖRNEK 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots.$ serisinin karakterini belirtiniz.

Bu seriyi $p = 2$ olan p serisi yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

serisi ile mukayese edelim. $p = 2$ halinde p serisi yakınsaktır. Diğer taraftan her n için

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

olup verilen seri de yakınsaktır.

ÖRNEK 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots,$ serisinin karakterini belirtiniz.

Bu seriyi de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ geometrik serisi ile mukayese edelim. Bu geometrik seri, ortak çarpanı $r = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan yakınsaktır. Diğer taraftan $n > 2$ için

$$\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$$

olup

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

serisi de yakınsak olur. Halbuki bu serinin baştarafına 1 ve $\frac{1}{2^2}$ terimlerini eklemekle serinin karakteri değişmeyeceğinden (bak. 16. 1-2. *TEOREM 1.*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

serisi de yakınsaktır.

ÖRNEK 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots.$ serisinin karakterini belirtiniz.

Bu seriyi de

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots$$

serisi ile mukayese edelim. Bu seri $p = 4$ olan p serisi olup yakınsaktır. Diğer taraftan $n \geq 1$ için

$$\frac{1}{(2n+1)^4} < \frac{1}{n^4}$$

olup verilen seri de yakınsaktır.

ÖRNEK 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ serisinin karakterini belirtiniz.

Bu seriyi de ıraksak olduğunu bildiğimiz

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

harmonik serisi ile mukayese edelim. $n > 1$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$$

olup verilen seri de ıraksaktır.

ÖRNEK 5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ serisinin karakterini belirtiniz.

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{n+1}$$

olduğu kolayca görülebilir. Diğer taraftan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

serısi harmonik serinin terimlerinin $\frac{1}{2}$ ile çarpılmasından elde edilen bir seri olup harmonik seri ile aynı karakterde yani ıraksaktır. O halde, mukayese kuralı icabı, verilen seri de ıraksaktır.

16.2 - 3. D'Alembert oran kuralı.

TEOREM. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *pozitif terimli serisi verilmiş ve*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = R$$

olsun. Eğer

$R < 1$ *ise seri yakınsak;*

$R > 1$ *ise seri ıraksak;*

$R = 1$ *ise birşey söylenemez.*

dir.

İspat : $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = R < 1$ olsun. n nin bir N değerinden itibaren $\frac{u_{N+1}}{u_N} < r$ olabilecek şekilde $R < r < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir r sayısı bulunabilir. Buna göre

$$n = N \quad \text{için} \quad \frac{u_{N+1}}{u_N} < r \quad \text{ve} \quad u_{N+1} < r\,u_N$$

$$n = N+1 \quad \text{için} \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < r \quad \text{ve} \quad u_{N+2} < r^2 u_N$$

$$n = N+2 \quad \text{için} \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < r \quad \text{ve} \quad u_{N+3} < r^3 u_N$$

... ...

... ...

yazılabilir. Sağ tarafta elde edilen eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım. Bu suretle

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots < r\,u_N + r^2 u_N + r^3 u_N + \ldots$$

elde edilir. İkinci taraf $|r| < 1$ olan bir geometrik seri olup yakınsaktır. Mukayese kuralı uygulandığı takdirde birinci taraftaki serinin de yakınsak olduğu çıkarılmış olur. Verilen u_n serisi de, birinci taraftaki serinin baştarafına sonlu sayıda terimler ilâve edilmek suretile elde edilmiş bir seri olduğuna göre, 16.1 - 2. *TEOREM 1.* den ötürü yakınsak olur.

Şimdi de $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = R > 1$ olduğunu kabul edelim. n nin N den büyük her değeri için

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} > 1 \quad \text{ve} \quad u_{N+1} > u_N$$

$$\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} > 1 \quad \text{ve} \quad u_{N+2} > u_{N+1} > u_N$$

$$\frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} > 1 \quad \text{ve} \quad u_{N+3} > u_{N+2} > u_N$$

... ...

... ...

yazılabilir. Bu da gösterir ki, n nin $N+1$ değerinden itibaren serinin her terimi u_N sayısından büyük kalmaktadır. O halde serinin n yinci terimi sıfır limitine yaklaşmamakta ve dolayısile seri ıraksaktır.

$R = 1$ halinde, kuralın birşey söyleyemeyeceğini bir örnekle açıklayalım.

ÖRNEK 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots.$ (p serisi) serisinin karakterini oran kuralı ile belirtmek isteyelim.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{1} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

dir. Bu sonuç p ne olursa olsun doğrudur. Halbuki p serisi, $p > 1$ için yakınsak; $p \leq 1$ için ıraksak olup, serinin karakteri p ye bağlıdır.

ÖRNEK 2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots.$ serisinin karakterini belirtiniz.

Serinin genel terimi $u_n = \frac{n}{2^n}$ ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

olarak seri yakınsaktır.

ÖRNEK 3. $1 + \frac{1}{10} + \frac{1.2}{10^2} + \frac{1.2.3}{10^3} + \ldots.$ serisinin karakterini belirtiniz.

Serinin genel terimi $u_n = \frac{n!}{10^n}$ ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{10} \to \infty$$

olup seri ıraksaktır.

ÖRNEK 4. Genel terimi $u_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$ olan serinin karakterini belirtiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} \div \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n} \div \frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < 1$$

olarak seri yakınsaktır.

16.2 - 4. Cauchy kuralı.

TEOREM. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *pozitif terimli serisi verilmiş ve*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = R$$

olsun. Eğer

$R < 1$ ise seri yakınsak;

$R > 1$ ise seri ıraksak;

$R = 1$ ise birşey söylenemez;

dir.

İspat : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = R < 1$ olsun. n nin bir N değerinden itibaren $\sqrt[N]{u_N} < r < 1$ olabilecek şekilde $R < r < 1$ eşitsizliğini sağlıyan bir r sayısı bulunabilir. Buna göre

$$\begin{array}{llll}
n = N & \text{için} & \sqrt[N]{u_N} < r & \text{ve} \quad u_N < r^N \\
n = N + 1 & \text{için} & \sqrt[N+1]{u_{N+1}} < r & \text{ve} \quad u_{N+1} < r^{N+1} \\
n = N + 2 & \text{için} & \sqrt[N+2]{u_{N+2}} < r & \text{ve} \quad u_{N+2} < r^{N+2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

yazılabilir. Sağ tarafta bulunan eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots < r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \ldots,$$

elde edilir. İkinci taraf $|r| < 1$ olan bir geometrik seri olup yakınsaktır. Mukayese kuralı uygulandığı takdirde birinci taraftaki serinin de yakınsak olduğu sonucuna varılır. Verilen u_n serisi de, birinci taraftaki serinin baş tarafına sonlu sayıda terimler ilâve edilmek suretile elde edilmiş bir seri olduğuna göre, 16.1 - 2. *TEOREM 1.* den ötürü yakınsak olur.

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = R > 1$ hali de benzer şekilde ispatlanabilir.

İhtar. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = R_1$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = R_2$ *olarak mevcut iseler* $R_1 = R_2$ *dir.*

ÖRNEK 1. Genel terimi $u_n = \dfrac{1}{(\log n)^n}$ olan serinin karakterini belirtiniz.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

olarak seri yakınsaktır.

ÖRNEK 2. Genel terimi $u_n = \left[\operatorname{tg}\left(a + \dfrac{\alpha}{n}\right)\right]^n$ olan serinin karakterini belirtiniz. $\left(0 < a < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sqrt[n]{u_n} < \operatorname{tg}\left(a + \frac{\alpha}{n}\right) \quad \text{olup} \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg} a$$

dır. Buna göre

$\operatorname{tg} a < 1$ yani $0 < a < \dfrac{\pi}{4}$ ise seri **yakınsak;**

$\operatorname{tg} a > 1$ yani $\dfrac{\pi}{4} < a < \dfrac{\pi}{2}$ ise seri **ıraksak;**

$\operatorname{tg} a = 1$ yani $a = \dfrac{\pi}{4}$ ise kural birşey söylemez.

$a = \frac{\pi}{4}$ olması halinde serinin karakterini araştırmak üzere u_n terimini ele alalım.

$$u_n = \left[\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right)\right]^n = \left[\frac{1 + \text{tg}\frac{\alpha}{n}}{1 - \text{tg}\frac{\alpha}{n}}\right]^n = \left[1 + \frac{2\,\text{tg}\frac{\alpha}{n}}{1 - \text{tg}\frac{\alpha}{n}}\right]^n$$

yazılabilir. Bu ise

$$u_n = \left[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{n\beta}$$

şeklinde düşünülebilir. $n \to \infty$ halinde $\beta \to 0$ ve $(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} \to e$ dir.

$$n\beta = \frac{2n\,\text{tg}\frac{\alpha}{n}}{1 - \text{tg}\frac{\alpha}{n}} = \frac{2\alpha\frac{\text{tg}\frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}}}{1 - \text{tg}\frac{\alpha}{n}}$$

olup

$$\lim_{n \to \infty} n\beta = 2\alpha$$

dir. O halde

$$\lim_{n \to \infty} u_n = e^{2\alpha} \neq 0$$

olarak $a = \frac{\pi}{4}$ halinde seri ıraksaktır. Bak. 16.1.3 *TEOREM*.)

16.2 - 5. $\frac{u_n}{v_n}$ kuralı

TEOREM 1. u_n *ve* v_n *pozitif terimli iki seri ve*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

olsun.

1) $l \neq 0$ *ise her iki seri aynı karakterdedir.*

2) $l = 0$ *ve* v_n *yakınsak ise* u_n *de yakınsaktır.*

3) $l \to \infty$ *ve* v_n *ıraksak ise* u_n *de ıraksaktır.*

İspat : $l \neq 0$ kabul edelim ve l den küçük bir ε pozitif sayısı seçelim. ε sayısına karşılık gelen öyle bir p tam sayısı bulalım ki n in p den büyük bütün değerleri için

$$l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlansın. Bu takdirde p yinci terimden itibaren

$$(l - \varepsilon)\, v_n < u_n < (l + \varepsilon)\, v_n$$

eşitsizliği daima yazılabilir. Eğer v_n serisi yakınsak ise $(l + \varepsilon)\, v_n$ de yakınsak ve

$$u_n < (l + \varepsilon)\, v_n$$

eşitsizliğinden ötürü u_n de yakınsak olur. Eğer v_n serisi, ıraksak ise $(l - \varepsilon)\, v_n$ de ıraksak ve

$$u_n > (l - \varepsilon)\, v_n$$

eşitsizliğinden ötürü u_n serisi de ıraksak olur. Buna göre $l \neq 0$ ise her iki serinin aynı karakterde olduğu gösterilmiş olur.

Eğer, $l = 0$ ve v_n serisi yakınsak ise belirli bir terimden itibaren

$$u_n < \varepsilon\, v_n$$

olacağından u_n serisi de yakınsaktır.

Eğer, $l \to \infty$ ve v_n serisi ıraksak ise, belirli bir terimden itibaren

$$u_n > A\, v_n$$

olacağından u_n serisi de ıraksaktır. A, pozitif keyfi bir sayıdır.

Bu kuraldan faydalanarak, bir u_n serisinin karakterini belirtmek için, $\frac{u_n}{v_n}$ oranı sıfırdan farklı bir limite malik olacak şekilde bir v_n serisi seçilir.

ÖRNEK 1. u_n genel terimi, n in iki tam çok terimlisinin bölümü şeklinde olan bir serinin karakterini belirtmeğe çalışalım. Bu halde

$$u_n = \frac{a\,n^p + b\,n^{p-1} + \ldots.}{a'\,n^q + b'\,n^{q-1} + \ldots.}$$

şeklindedir. p ve q tam ve pozitif sayılar, a ve a' de pozitif sayılardır.

Böyle bir serinin karakterini belirtmek için v_n serisi olarak

$$v_n = \frac{n^p}{n^q}$$

genel terimli seri seçilir. Bu takdirde

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{a\,n^p + b\,n^{p-1} + \ldots.}{n^p} \div \frac{a'\,n^q + b'\,n^{q-1} + \ldots.}{n^q}$$

olup

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{a'} \neq 0$$

dir. Buna göre her iki seri aynı karakterdedir.

$$v_n = \frac{1}{n^{q-p}}$$

şeklinde olup p serisidir. O halde

$q - p > 1$ ise v_n serisi yakınsak dolayısile u_n serisi de yakınsaktır.

$q - p \leq 1$ ise v_n serisi ıraksak, dolayısile u_n serisi de ıraksaktır.

Buradan, u_n serisinin yakınsak olabilmesi için $q - p > 1$ veya $q \geq p + 2$ olması gerektiği söylenebilir.

SONUÇ. Genel terimi, n nin iki tam çok terimlisinin bölümü şeklinde olan bir seri, genel terimin paydasının derecesi, payının derecesinden en az iki fazla olduğu zaman yakınsaktır.

Örneğin genel terimleri $\dfrac{1}{n(n+5)}$, $\dfrac{n^2+1}{n^4-7}$ olan seriler yakınsak; genel terimleri $\dfrac{n}{n^2+4}$, $\dfrac{n^2-1}{2n^2+1}$ olan seriler ıraksak serilerdir.

ÖRNEK 2. Aynı kural, u_n in n nin irrasyonel cebirsel fonksiyonu şeklinde olması halinde de uygulanır. Örneğin

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}$$

serisi verilmiş olsun. v_n olarak

$$v_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2 . \sqrt{n}}$$

seçilebilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}} \div \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2\sqrt{n}} = 1 \neq 0$$

olarak her iki seri aynı karakterdedir.

$$v_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2\sqrt{n}} = \frac{n^{4/3}}{n^2 . n^{1/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

serisi $p = \dfrac{7}{6} > 1$ olan p serisi olup yakınsak ve dolayısile u_n serisi de yakınsaktır.

ÖRNEK 3. Genel terimi $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{\pi}{n}$ olan serinin karakterini belirtiniz.

v_n serisi olarak $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{1}{n}$ serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{1}{n}} = \pi \neq 0$$

olarak her iki seri aynı karakterdedir.

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

serisi $p = \frac{3}{2} > 1$ olan p serisi olup yakınsak ve dolayısile u_n serisi de yakınsaktır.

TEOREM 2. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *pozitif terimli bir seri ve*

$$\lim_{n \to \infty} n^p u_n = l$$

olsun.

1) $l \neq 0$ *ve* $\begin{cases} p > 1 & \textit{ise } u_n \textit{ serisi yakınsak;} \\ p \leq 1 & \textit{ise } u_n \textit{ serisi ıraksak;} \end{cases}$

2) $l = 0$ *ve* $p > 1$ *ise* u_n *serisi yakınsak;*

3) $l \to \infty$ *ve* $p \leq 1$ *ise* u_n *serisi ıraksak;*

dır.

Teoremin ispatı, bundan evvelki teoremde $v_n = \frac{1}{n^p}$ seçilmek suretile kolayca yapılabilir.

16.2 - 6. Raabe kuralı.

TEOREM. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *pozitif terimli bir seri ve*

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right] n = \beta$$

olsun.

1) $\beta < -1$ *ise seri yakınsak;*

2) $\beta > -1$ *ise seri ıraksak;*

Bu kural, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ in limitinin 1 e eşit olması halinde serinin karakterini belirtmeye imkân veren bir kuraldır.

ÖRNEK. Genel terimi $u_n = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}$ olan serinin karakterini bulunuz.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right]n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+1}{2n+2}-1\right]n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+2} = -\frac{1}{2} > -1$$

olarak seri ıraksaktır.

16-3 Pozitif terimli yakınsak bir serinin toplamının hesabı

Pozitif terimli bir serinin toplamını elde etmek için, geometrik seride yapıldığı gibi, evvelâ S_n toplamının limitini hesaplama denenir.

ÖRNEK. Genel terimi $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ olan serinin toplamını hesaplayınız.

Serinin S_n *toplamı*

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

olup

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Bu şekildeki işlem nadiren pratiktir. Zira çok sayıda serinin toplamları, ölçülemeyen sayılar olup ancak belirli bir yaklaşıklıkla hesaplanır.

Bunun için de S toplamı yerine S_n toplamı hesaplanır. Bu suretle yapılan hata $S - S_n$ olur. Buna göre $R_n = S - S_n$ hatası

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots.$$

dir. Bu da sonsuz terimli bir seri olduğundan tam olarak hesaplanamaz. Bu sebepten, mutlak değer bakımından R_n den büyük öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı aranır ki S toplamı $S_n - \varepsilon$ ile $S_n + \varepsilon$ arasında kalsın. Bu takdirde S_n, S in kendisinden küçük bir yaklaşık değeri olur. Genel olarak ε, n e bağlıdır. n öyle seçilebilir ki ε istenildiği kadar küçük olsun.

S toplamı yerine S_n kısmi toplamını almakla yapılan hata, yalnız R_n değildir. S_n in terimlerini hesaplarken de hata yapılır. Sonucu belirtirken bu hataların da gözönüne alınması gerekir.

Pozitif terimli yakınsak serilerde S toplamı yerine S_n kısmi toplamını almakla yapılacak hatanın mertebesi kolayca belirtilebilir.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. n in öyle bir p değeri bulunabilir ki bu değerden itibaren

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < k < 1$$

eşitsizliği sağlansın. Buna göre

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k \qquad\qquad u_{n+1} < k\, u_n$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k\,, \quad u_{n+2} < k\, u_{n+1}, \quad u_{n+2} < k^2 u_n$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k\,, \quad u_{n+3} < k\, u_{n+2}, \quad u_{n+3} < k^3 u_n$$

... ...

... ...

yazılıp sağ tarafta bulunan eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots < u_n\,(k + k^2 + k^3 + \ldots)$$

$$R_n < u_n\,(k + k^2 + k^3 + \ldots)$$

$$\boxed{R_n < u_n\,\frac{k}{1-k}}$$

elde edilir. Buna göre, pozitif terimli yakınsak bir seride, S toplamı yerine S_n kısmî toplamını almakla yapılan hata, en son alınan terimin $\frac{k}{1-k}$ ile çarpımından küçüktür.

Genellikle, bir serinin S toplamının, belirli bir p ondalığa kadar gerçek olan değeri hesaplanmak istenir. Bunun için, baştan itibaren terimler $p+2$ ondalığa kadar hesaplanır ve bu hesaba, ilk p ondalığı sıfır olan bir terime varıncaya kadar devam edilir. Bu suretle elde edilen terimlerin toplamı, S toplamının, p ondalığı doğru, yaklaşık bir değerini verir. (pratik kural)

ÖRNEK. $$\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \ldots + \frac{2}{(2n-1).3^{2n-1}} + \ldots$$

serisinin toplamını $\frac{1}{10^6}$ yakınlıkla hesaplayınız.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{(2n+1)\,3^{2n+1}} \cdot \frac{(2n-1)\,3^{2n-1}}{2} = \frac{1}{3^2}\,\frac{2n-1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{9}$$

olup n ne olursa olsun $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{9}$ dur. Buna göre S toplamı yerine S_n kısmî toplamını almakla yapılan hata

$$R_n = S - S_n < u_n \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{u_n}{8}$$

dir. O halde n i öyle seçmelidir ki $u_1, u_2, \ldots, u_n$ i hesaplarken yapılan hataların toplamı ile $\frac{u_n}{8}$ in toplamı $\frac{1}{10^6}$ dan küçük kalsın.

Sonucun altı ondalığı doğru olması istendiğine göre, yukarıda söylenen pratik kurala göre, u_i leri $6 + 2 = 8$ ondalığa kadar hesaplıyalım ve bu hesaba ilk altı ondalığı sıfır olan terimi buluncaya kadar devam edelim.

$$u_1 = \frac{2}{1 \cdot 3} = 0{,}666\ 666\ 66$$

$$u_2 = \frac{2}{3 \cdot 3^3} = 0{,}024\ 691\ 35$$

$$u_3 = \frac{2}{5 \cdot 3^5} = 0{,}001\ 646\ 09$$

$$u_4 = \frac{2}{7 \cdot 3^7} = 0{,}000\ 130\ 64$$

$$u_5 = \frac{2}{9 \cdot 3^9} = 0{,}000\ 011\ 29$$

$$u_6 = \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} = 0{,}000\ 001\ 02$$

$$u_7 = \frac{2}{13 \cdot 3^{13}} = 0{,}000\ 000\ 09$$

Buradan görülüyor ki

$$u_7 < \frac{1}{10^7} \quad \text{ve} \quad S - S_7 < \frac{1}{10^7} \cdot \frac{1}{8} < \frac{2}{10^8}$$

dir. Diğer taraftan $u_1, u_2, \ldots$ nin herbirinin hesabında yapılan hata

$\frac{1}{10^8}$ den küçük ve bunların hepsinde yapılan hataların toplamı ise $\frac{7}{10^8}$ den küçüktür. O halde, S yerine S_7 yi almakla yapılan hata ile terimlerin hesabında yapılan hataların toplamı

$$\frac{2}{10^8} + \frac{7}{10^8} = \frac{9}{10^8}$$

den küçüktür. Bu suretle S toplamının $\frac{9}{10^8}$ den daha küçük hatalı bir yaklaşık değeri bulunmuş olur.

$$S_7 = 0{,}693\ 147\ 14$$

olduğuna göre

$$S_7 < S < S_7 + \frac{9}{10^8}$$

$$\underline{0{,}693\,147}\ 14 < S < \underline{0{,}693\,147}\ 23$$

olup altı ondalık doğru değeri 0,693 147 dir. Buradan, yukarıda verilen pratik kuralın da teorik yola uygun bir sonuç verdiği kolayca görülür.

16-4 Değişik işaretli seriler

Bir serinin terimlerinin işaretleri yalnız pozitif olmak yerine bir kısmı pozitif ve bir kısmı da negatif işaretli olabilir. Bu gibi serilere *değişik işaretli seriler* denir.

TEOREM. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *değişik işaretli bir seri olsun. Bu seride herbir terim yerine mutlak değerleri konulmak suretile elde edilecek*

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{1}$$

serisi yakınsak ise verilen değişik işaretli seri de yakınsaktır.

Bu halde seriye *mutlak yakınsak seri* denir.

İspat : Verilen serinin

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

toplamındaki pozitif terimlerin toplamı A_n ve negatif terimlerin toplamı da $-B_n$ olsun. B_n, negatif terimlerin mutlak değerlerinin toplamıdır. Buna göre

$$S_n = A_n - B_n$$

dir. Verilen serinin terimlerinin mutlak değerlerinden meydana gelmiş olan serinin ilk n teriminin toplamı ise

$$m_n = A_n + B_n$$

dir. Yakınsak olduğunu kabul ettiğimiz (1) serisinin toplamı M olsun. m_n toplamının terimleri pozitif olduğundan limit halinde, artarak M değerini alacaktır. Buna göre

$$m_n < M \quad \text{veya} \quad A_n + B_n < M$$

ve buradan da, A_n ve B_n pozitif veya sıfır olduklarından

$$A_n < M \quad , \quad B_n < M$$

yazılabilir. S_n den S_{n+1} toplamına geçildiği zaman A_n, $u_{n+1} > 0$ ise u_{n+1} kadar artacak, $u_{n+1} < 0$ ise değişmeyecektir. Buna göre, n arttığı zaman A_n asla azalmaz ve daima M den küçük kalır. O halde A_n, 16.1-2. *TEOREM 3*. e göre $n \to \infty$ halinde bir A limitine yaklaşacaktır.

Aynı şekilde n in sınırsız olarak artması halinde, B_n in de bir B limitine yaklaşacağı gösterilebilir. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (A_n - B_n) = A - B$$

olduğu gösterilmiş olur ki bu da verilen değişik işaretli serinin yakınsak ve toplamının $S = A - B$ olduğunu gösterir.

ÖRNEK. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$ serisinin mutlak yakınsak olup olmadığını gösteriniz.

Serinin terimlerinin mutlak değerlerinden meydana gelen

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

pozitif terimli serisi, $p = 2$ olan p serisi olup yakınsaktır. O halde, verilen seri mutlak yakınsak bir seridir.

Değişik işaretli yakınsak bir seri mutlak yakınsak değilse böyle bir seriye *şarta bağlı yakınsak seri* denir.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

serisinin terimlerinin mutlak değerlerinden meydana gelmiş olan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

serisi harmonik seri olarak ıraksaktır. Buna göre verilen seri, mutlak yakınsak bir seri değildir. Bu serinin yakınsak ve dolayısile şarta bağlı yakınsak bir seri olduğunu ileride göreceğiz.

İhtar. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ serisi şarta bağlı yakınsak bir seridir. Ancak bu serinin terimlerinin yerleri değiştirilmek suretile elde edilen

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right] + \dots$$

serisi ıraksak bir seridir. Buna göre, mutlak yakınsak olmayan bir yakınsak seri, terimlerinin yerleri değiştirilmek suretile ıraksak bir seri haline getirilebilir.

16-5 Alternatif seriler.

Terimleri alternatif olarak pozitif ve negatif olan serilere *alternatif seriler* denir.

n ne olursa olsun $u_n > 0$ olarak

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n \pm \dots$$

serisi alternatif bir seridir. Örneğin

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

serisi alternatif bir seri olup alternatif harmonik seri adını alır.

TEOREM 1. $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ *alternatif serisinde* n *artarken, serinin terimleri mutlak değer bakımından azalıyor veya sabit kalıyor ve*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

oluyorsa seri yakınsaktır.

İspat : $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ serisinde

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$$

yazılabilir. Bu ifadelerde bulunan parantezlerin içi pozitifdir. Buna göre, birinci ifade S_{2m} in m ile birlikte arttığını ve ikinci ifade ise S_{2m} in daima u_1 den küçük kaldığını gösterir. O halde, n sınırsız olarak arttığı zaman S_{2m} bir S limitine yaklaşır. (16.1-2. *TEOREM 3.* e bak.) Diğer taraftan

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

olup

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S + 0 = S$$

elde edilir. Buna göre, n çift ve tek değerlerden geçerek, sınırsız olarak arttığı zaman, S_n bir S limitine yaklaşır. Bu da serinin yakınsak olduğunu gösterir.

ÖRNEK 1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz. *(Alternatif harmonik seri)*

Serinin genel terimi $|u_n| = \frac{1}{n}$ olarak

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \text{ve} \lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

olup seri yakınsaktır. Bu serinin terimlerinin mutlak değerlerinden meydana gelen seri, harmonik seri olarak, ıraksak olduğundan, seri, şarta bağlı yakınsak seridir.

ÖRNEK 2. $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \ldots$ serisinin karakterini belirtiniz.

$$|u_n| = \frac{n}{2^n}$$

olarak

$$|u_{n+1}| = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right] < \frac{n}{2^n} = u_n$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

olup seri yakınsaktır. Diğer taraftan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \div \frac{n}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

olup seri mutlak yakınsaktır.

TEOREM 2. Yakınsak bir alternatif seride, S toplamı yerine S_n toplamını almakla yapılan hata, $(n+1)$inci terimden yani atılan terimlerin ilkinden küçüktür.

İspat :

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

olsun. n çift ise :

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_n + u_{n+1} - \ldots$$

$$S = S_n + u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots$$

$$S - S_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots$$
$$S - S_n = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots$$

olarak

$$S - S_n < u_{n+1}$$

ve n tek ise :

$$S = S_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \dots$$
$$S_n - S = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots$$
$$S_n - S = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots$$

olarak

$$S_n - S < u_{n+1}$$

bulunur. Her iki halde de S yerine S_n i almakla yapılan hatanın

$$\boxed{|S - S_n| < u_{n+1}}$$

olduğu görülür.

16-6 Değişken terimli seriler (Kuvvet serileri)

Değişkenleri içeren

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots$$

şeklindeki serilere *kuvvet serileri* denir. x, değişken olduğuna göre, x in alacağı her değere karşılık bir nümerik seri elde edilir. Bu serilerden bazıları yakınsak, bazıları da ıraksak olabilir. Buradan, kuvvet serilerinin yakınsak olabilmelerinin x in değerlerine bağlı olduğu sonucuna varılır. Böyle bir serinin yakınsak olabilmesi için x in

hangi değerleri alması gerektiği D'Alembert Oran kuralının $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ e uygulanması suretile belirtilebilir.

Bu kural $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ serisine uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}\,x^{n+1}}{c_n\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x|$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = R \quad \text{ise} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = R\,|x|$$

dir. Serinin yakınsak olabilmesi için

$$R\,|x| < 1 \quad , \quad |x| < \frac{1}{R}$$

$$-\frac{1}{R} < x < +\frac{1}{R}$$

olması gerekir. $x = +\frac{1}{R}$ ve $x = -\frac{1}{R}$ için kural birşey söylemediğinden, x in bu değerleri için serinin karakteri ayrıca belirtilmelidir. Bu suretle elde edilen $\left(-\frac{1}{R}\ , +\frac{1}{R}\right)$ aralığına serinin *yakınsaklık aralığı* denir. $\frac{1}{R}$ *yakınsaklık yarıçapı* adını alır.

ÖRNEK 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\,x\right| = |x|$$

olup serinin yakınsak olabilmesi için

$$|x| < 1 \qquad \text{yani} \qquad -1 < x < +1$$

olmalıdır. $x = -1$ için seri

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$$

olup şarta bağlı yakınsaktır. $x = 1$ için ise seri :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

olarak harmonik seri olup ıraksaktır.

Bunlara göre verilen serinin yakınsaklık aralığı

$$-1 \leq x < 1$$

dir.

ÖRNEK 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n \cdot n^2}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^2} \quad \frac{2^n n^2}{(x+1)^n}\right| = \left|\frac{1}{2} \frac{n^2}{(n+1)^2}(x+1)\right.$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{2}|x+1|$$

olup serinin yakınsak olabilmesi için

$$\frac{1}{2}|x+1| < 1 \quad ; \quad |x+1| < 2;$$

$$-2 < x + 1 < +2$$

olmalıdır. $x + 1 = -2$ için seri :

$$\frac{2}{2 \cdot 1^2} + \frac{2^2}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{2^3}{2^3 \cdot 3^2} + \ldots.$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots.$$

olarak yakınsaktır. ($p = 2$ olan p serisi).

$x + 2 = 2$ için ise seri ;

$$-\frac{2}{2 \, . \, 1^2}+\frac{2^2}{2^2 \, . \, 2^2}-\frac{2^3}{2^3 \, . \, 3^2}+\ldots .$$

$$-\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots .$$

olarak yakınsaktır. (mutlak yakınsak seri).

Bunlara göre verilen serinin yakınsaklık aralığı

$$-2 \leq x+1 \leq 2 \quad ; \quad -3 \leq x \leq 1$$

dir.

16-7 Fonksiyonların seriye açılımı.

$y = f(x)$ az veya çok karışık bir fonksiyon olsun. x in verilmiş farklı nümerik değerleri için $f(x)$ in değerlerini hesaplamak, genel olarak zahmetli ve çok uzun olur. Örneğin

$$y = \frac{1}{a}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) \; ; \; y = \text{Arctg}\,\frac{1}{1+e^x} \; ; \; y = \sqrt{1+\sin^2 x}$$

fonksiyonlarının x in verilmiş bir değerine karşılık olan değerini doğrudan doğruya hesaplamak çok zordur.

Aynı şekilde olasılık teorisinde çok karşılaşılan $\int_0^a e^{-t^2}\,dt$ integrali, adi fonksiyonlar yardımiyle hesaplanamaz.

Halbuki fonksiyonları çok daha basit şekillere sokmak suretile, değerlerini küçük yaklaşıklıklarla bu ifadelerden hesaplamak mümkündür. Fonksiyonların seriye açılımı bu yollardan bir tanesidir. Bu sayede $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg}\, x$ i veren trigonometrik oran tabloları gibi birçok tabloların meydana getirilmesi mümkün olmuştur.

Bir fonksiyon, bağımsız değişkenin yakınsaklık aralığındaki değerleri için, bir kuvvet serisi ile gösterilebilir. Bağımsız değişkenin verilen bir değeri için, fonksiyonun yaklaşık bir değeri, serinin baştan az sayıda terimlerini kullanarak hesaplanabilir.

Fonksiyonların seriye açılımları *Maclaurin* ve *Taylor serileri* adı ile anılan iki tür seri yardımiyle yapılır.

16.7 - 1. Maclaurin serisi.

Maclaurin XVII. yüzyılda yaşamış bir matematikçi olup, bir fonksiyonun, bağımsız değişkenin artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir tam çok terimli ile gösterilmesi fikrini ortaya atmıştır.

Bu şekildeki bir ifadeden yapılacak hesaplama, hiç şüphesiz çok kolay olacaktır. Zira, x in verilmiş bir değerinden fonksiyonun değerini hesaplamak için $a\,x^m$ şeklindeki terimleri hesaplayıp toplamak gerekecektir ki bu da en basit bir hesaplama şeklidir.

Bunun mümkün olabilmesi için, çok terimlinin terimleri, mutlak değer bakımından, gittikçe küçülmeli ve toplamları sonsuz olmamalı yani seri yakınsak olmalıdır.

Maclaurin serisini elde etmek üzere $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \qquad (1)$$

şeklinde ifade etmek isteyelim. Şimdi de bu açılımın mümkün olabilmesi için a_i lerin neler olduğunu araştıralım. Bunun için de ifadenin kendisini ve türevlerini yazalım.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2x + 3\,a_3x^2 + 4\,a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 1\,.\,2\,a_2 + 2\,.\,3\,a_3x + 3\,.\,4\,a_4x^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 1\,.\,2\,.\,3\,a_3 + 2\,.\,3\,.\,4\,a_4x + \dots$$

$$f^{IV}(x) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,a_4 + \dots$$

... ...

... ...

Şimdi de $x = 0$ için bu eşitliklerin alacağı şekilleri elde edelim.

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 1 \,.\, 2\, a_2$$

$$f'''(0) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3\, a_3$$

$$f^{IV}(0) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\, a_4$$

... ...

Bunlardan da a_i katsayıları çözülürse

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = \frac{1}{1} f'(0) = \frac{1}{1!} f'(0)$$

$$a_2 = \frac{1}{1.2} f''(0) = \frac{1}{2!} f''(0)$$

$$a_3 = \frac{1}{1.2.3} f'''(0) = \frac{1}{3!} f'''(0)$$

$$a_4 = \frac{1}{1.2.3.4} f^{IV}(0) = \frac{1}{4!} f^{IV}(0)$$

... ...

... ...

$$a_n = \frac{1}{1.2.3 \ldots n} f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

... ...

elde edilir. Bu değerleri (1) ifadesinde yerlerine koyarsak

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots}$$

sonucuna varılır ki bu ifadeye $f(x)$ in *Maclaurin serisi* denir. Bu ifadeden kolayca görülebilir ki, $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisine açılabilmesi için $f(x)$ ve türevlerinin $x = 0$ için tanımlı ve sürekli olması gerekir.

Maclaurin serisi, $f(x)$ i x in yakınsaklık aralığı içindeki değer-

leri için temsil etmekle beraber, bu seri, $f(x)$ in x in sıfır civarındaki değerlerine karşılık olan değerlerinin hesabında, kullanılmalıdır.

ÖRNEK 1. $y = e^x$ fonksiyonunu seriye açınız ve elde edilen ifadede $x = 1$ yaparak e sayısını bulunuz.

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = e^0 = 1$$

... ...

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

olarak

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots}$$

bulunur. Bu seri x in her değeri için e^x fonksiyonunu temsil eder. $x = 1$ için

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots}$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $y = \sin x$ fonksiyonunu seriye açınız.

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = \sin x \qquad f^{IV}(0) = 0$$

... ...

olarak

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}\, x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp \dots$$

bulunur. Bu seri x in her değeri için $\sin x$ i temsil eder.

ÖRNEK 3. $y = \cos x$ i seriye açınız.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{IV}(x) = \cos x & f^{IV}(0) = 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

olarak

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$$

bulunur. Bu seri x in her değeri için $\cos x$ i temsil eder.

ÖRNEK 4. $y = \sin^2 x$ i seriye açınız.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin^2 x & f(0) = 0 \\ f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = 2\cos 2x & f''(0) = 2 \\ f'''(x) = -4\sin 2x & f'''(0) = 0 \\ f^{IV}(x) = -8\cos 2x & f^{IV}(0) = -8 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

olarak

$$\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!} + \frac{32x^6}{6!} - \frac{128x^8}{8!} + \dots$$

bulunur.

ÖRNEK 5. $y = \text{Arcsin}\, x$ fonksiyonunu seriye açınız.

$$f(x) = \text{Arcsin}\, x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = x(1-x^2)^{-3/2} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2} \qquad f'''(0) = 1$$

... ...

olarak

$$\text{Arcsin}\, x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \dots$$

bulunur.

ÖRNEK 6. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ yi seriye açınız.

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = x(1+x^2)^{-1/2} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (1+x^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2)^{-3/2} \qquad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = -3x(1+x^2)^{-3/2} + 3x^3(1+x^2)^{-5/2} \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = -3(1+x^2)^{-3/2} + 18x^2(1+x^2)^{-5/2} - 15x^4(1+x^4)^{-7/2} \qquad f^{IV}(0) = -3$$

... ...

olarak

$$\boxed{\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{3x^6}{6} - \ldots}$$

bulunur. Bu seride x^2 yerine $-x^2$ koyarsak

$$\boxed{\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{3x^6}{6} - \ldots}$$

elde edilir.

$|x| < 1$ halinde, bu serilerdeki x^4 lü terimden itibaren olan terimler atılarak $\sqrt{1+x^2}$ ve $\sqrt{1-x^2}$ için şu yaklaşık formüller bulunur.

$$\boxed{\sqrt{1+x^2} \cong 1 + \frac{x^2}{2}} \qquad \boxed{\sqrt{1-x^2} \cong 1 - \frac{x^2}{2}}$$

Bunlar yardımiyle

$$\sqrt{1{,}01} = \sqrt{1+(0{,}1)^2} = 1 + \frac{(0{,}1)^2}{2} = 1{,}005$$

$$\sqrt{0{,}99} = \sqrt{1-(0{,}1)^2} = 1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}995$$

bulunur.

ÖRNEK 7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ yi seriye açınız.

$$f(x) = (1+x^2)^{-1/2} \qquad\qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -x(1+x^2)^{-3/2} \qquad\qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -(1+x^2)^{-3/2} + 3x^2(1+x^2)^{-5/2} \qquad\qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 9x(1+x^2)^{-5/2} - 30x^3(1+x^2)^{-7/2} \qquad\qquad f'''(0) = 0$$

... ...

olarak

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}x^4 - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}x^6 + \ldots$$

bulunur. Bu ifadede x^2 yerine $-x^2$ konursa

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}x^4 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}x^6 + \ldots$$

elde edilir.

$|x| < 1$ halinde, bunlardan

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cong 1 - \frac{x^2}{2} \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cong 1 + \frac{x^2}{2}$$

yaklaşık formülleri elde edilir.

16.7 - 2. Binom formülü.

$(a+b)^m$ veya $(a-b)^m$ in açılımını veren formülü bulmak isteyelim. Burada m i pozitif, negatif, tam veya kesirli bir sayı olarak kabul ediyoruz. Bunu elde etmek üzere $y = (a+x)^m$ fonksiyonunu Maclaurin serisine açalım.

$$f(x) = (a+x)^m \qquad\qquad f(0) = a^m$$

$$f'(x) = m(a+x)^{m-1} \qquad\qquad f'(0) = m\,a^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)\,(a+x)^{m-2} \qquad\qquad f''(0) = m(m-1)\,a^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)\,(m-2)\,(a+x)^{m-3}$$

$$f'''(0) = m(m-1)\,(m-2)\,a^{m-3}$$

... ...

olarak

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1!}a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}x^3 + \ldots.$$

bulunur. Bu açılımda $x = b$ yapılırsa Newton'un Binom formülü elde edilir. Buna göre

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1!}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}b^3 + \ldots.$$

elde edilir.

$(a-b)^m$ i elde etmek için yukarıdaki formülde işaretleri alternatif olarak $+$ ve $-$ yapmak gerekir.

m tam ve pozitif olursa açılımda $m+1$ terim bulunur. Diğer hallerde açılımda sonsuz terim bulunur.

Açılımın herhangibir r numaralı terimi

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-r+2)}{(r-1)!}a^{m-r+1}b^{r-1}$$

dir.

ÖRNEK 1. $\sqrt{1+x}$ i seriye açınız.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

olarak binom açılımını uygularsak

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}.1.x + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3 + \ldots.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{16} - \ldots.$$

ve x yerine $-x$ koyarak

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots$$

bulunur.

Örneğin,

$$\sqrt{0{,}9} = \sqrt{1 - 0{,}1} = 1 - \frac{1}{2.10} - \frac{1}{8.10^2} - \frac{1}{16.10^3} - \cdots$$

$$\cong 1 - 0{,}05 - 0{,}00125 - 0{,}00006$$

$$\cong 1 - 0{,}05131 \cong 0{,}94869$$

dir. Bu sonucun dört ondalığı doğrudur.

16.7 - 3. Taylor serisi.

$f(x)$ fonksiyonunu $x - a$ nın artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir kuvvet serisi ile göstermek isteyelim.

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + b_4(x-a)^4 + \ldots$$

olsun. Şimdi bu eşitliğin doğru olabilmesi için b_i katsayılarının neler olması gerektiğini araştıralım. Bunun için de yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının türevlerini eşitleyelim. Buna göre

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + b_4(x-a)^4 + \ldots$$

$$f'(x) = b_1 + 2\,b_2(x-a) + 3\,b_3(x-a)^2 + 4\,b_4(x-a)^3 + \ldots$$

$$f''(x) = 1.2\,b_2 + 2.3\,b_3(x-a) + 3.4\,b_4(x-a)^2 + \ldots$$

$$f'''(x) = 1.2.3\,b_3 + 2.3.4\,b_4(x-a) + \ldots$$

$$f^{IV}(x) = 1.2.3.4\,b_4 + \ldots$$

... ...

ve bunlarda $x = a$ yapılırsa

$$f(a) = b_0 \qquad\qquad b_0 = f(a)$$

$$f'(a) = b_1 \qquad\qquad b_1 = \frac{1}{1!}f'(a)$$

$$f''(a) = 1 \,.\, 2\, b_2 \qquad\qquad b_2 = \frac{1}{2\,!} f''(a)$$

$$f'''(a) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3\, b_3 \qquad\qquad b_3 = \frac{1}{3\,!} f'''(a)$$

$$f^{IV}(a) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\, b_4 \qquad\qquad b_4 = \frac{1}{4\,!} f^{IV}(a)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$f^{(n)}(a) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,..\, n\, b_n \qquad\qquad b_n = \frac{1}{n\,!} f^{(n)}(a)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

elde edilir. Bunları $f(x)$ ifadesinde yerlerine koyarsak

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1\,!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(a) + \ldots}$$

bulunur ki bu seriye de $f(x)$ in $x - a$ nın kuvvetlerine göre düzenlenmiş *Taylor serisi* denir.

$f(x)$ fonksiyonunun böyle bir Taylor serisine açılabilmesi için $f(x)$ ve türevlerinin $x = a$ için tanımlı ve sürekli olması gerekmektedir.

Taylor serisi, $f(x)$ i, x in yakınsaklık aralığındaki değerleri için temsil eder

Zorunlu olmamakla beraber Taylor serisi $f(x)$ in x in a civarındaki değerlerine karşılık olan değerlerinin hesabında kullanılmalıdır

Yukarıda elde edilen Taylor serisinde $x = b$ yapılırsa :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1\,!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2\,!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

ve bu seride $b = a + h$ yapılırsa :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

elde edilir.

ÖRNEK 1. $y = \log x$ fonksiyonunu $x - 1$ in artan kuvvetlerine göre seriye açınız.

$f(x) = \log x$	$f(1) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(1) = 1$
$f''(x) = -x^{-2}$	$f''(1) = -1$
$f'''(x) = 2x^{-3}$	$f'''(1) = 2$
$f^{IV}(x) = -6x^{-4}$	$f^{IV}(1) = -6$
... ...	... ...

olarak

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots .$$

bulunur.

ÖRNEK 2. e^x fonksiyonunu $x - 2$ nin artan kuvvetlerine göre seriye açınız.

$f(x) = e^x$	$f(2) = e^2$
$f'(x) = e^x$	$f'(2) = e^2$
... ...	... ...

olarak

$$e^x = e^2 \left[1 + \frac{x-2}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \ldots . \right]$$

bulunuz.

ÖRNEK 3. $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olarak bilindiğine göre $\sin 61^0$ yi hesaplayınız.

$$f(a) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad f(a+h) = \sin 61^0$$

$$a = 60^0 = \frac{\pi}{3} \text{ radyan} \quad ; \quad h = 1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ radyan}$$

ve

$$f(x) = \sin x \qquad f(a) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(a) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(a) = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(a) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \, .$$

olarak

$$\sin 61^0 = f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \left(-\frac{1}{2}\right) + \ldots.$$

$$= 0{,}866 + \frac{\pi}{180} \; 0{,}5 - \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \frac{0{,}866}{2} - \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \cdot \frac{0{,}5}{6}$$

$$\cong 0{,}8746$$

bulunur.

ÖRNEK 4. $\sqrt[3]{1{,}2}$ yi hesaplayınız.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad , \qquad a = 1 \, , \quad h = 0{,}2$$

olarak

$$f(a) = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \text{ve} \quad f(a+h) = \sqrt[3]{1{,}2}$$

olur. Bunlara göre

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f(a) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{-2/3} \qquad f'(a) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\, x^{-5/3} \qquad f''(a) = -\frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}\, x^{-8/3} \qquad f'''(a) = \frac{10}{27}$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

olup

$$\sqrt[3]{1{,}2} = 1 + \frac{0{,}2}{1!} \cdot \frac{1}{3} + \frac{(0{,}2)^2}{2!}\left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{(0{,}2)^3}{3!} \cdot \frac{10}{27} + \ldots$$

$$= 1 + 0{,}066 - 0{,}004 + \ldots = 1{,}062$$

bulunur.

16.7 - 4. Maclaurin ve Taylor serileri ile Maclaurin ve Taylor formüllerinin karşılaştırılması.

Birinci kitap 13.3 de çıkarmış olduğumuz Taylor ve Maclaurin formüllerini hatırlayalım.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_1)$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

şeklindeki Taylor formülleri ile

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$$

şeklinde Maclaurin formülü elde edilmişti. Bu formülleri

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + ..$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

şeklinde Taylor serileri ve

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + ..$$

şeklindeki Maclaurin serisi ile karşılaştırırsak bunların ilk n terimlerinin birbirinin aynı olduğu ve serilerdeki n. terimden sonraki terimlerin yerine, formüllerde birer tamamlayıcı terimin gelmiş olduğu görülür. O halde, serilerin n. terimden sonraki terimlerinin toplamlarının limiti bu tamamlayıcı terime eşit olmalıdır. Bu tamamlayıcı terimler Taylor formülü için

$$\boxed{R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_1) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)}$$

ve Maclaurin formülü için

$$\boxed{R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x_1) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)}$$

şeklinde olup bunlara n terimden sonraki kalan adı verildiği 13.3 de görülmüştü.

Bu formüller yardımiyle $f(x)$ in değerinin hesabında ilk n terim alınmak suretile hesap yapılırsa hata R_n e eşit olacaktır. Bu terimin gerçek değerinin bulunması mümkün olamıyacağına göre hatanın mertebesini belirtmek üzere R_n in kimden küçük kaldığı araştırılır. a ile $a+h$ aralığında $f^{(n)}(x)$ i en büyük kılan x değeri x' ise Taylor formülü için

$$\boxed{|R_n| \leq \left| f^{(n)}(x') \frac{h^n}{n!} \right|}$$

ve Maclaurin formülü için

$$\boxed{|R_n| \leqq \left| f^{(n)}(x') \frac{x^n}{n!} \right|}$$

dir. Bunlara göre, x in verilmiş bir değeri için $f(x)$ fonksiyonunun değerini istenen bir yaklaşıklıkla hesaplamak mümkündür.

Bunlar için 13.3 de örnekler verilmişti. Şimdi de iki örnek ele alalım.

ÖRNEK 1. $e^{1/3}$ ün hesabında 5 terim alınırsa hata ne olur?

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \qquad ; \qquad 0 < \theta < 1$$

olup $n = 5$ için

$$R_5 = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5!} e^{\frac{1}{3}\theta} = \frac{e^{\theta/3}}{29160}$$

$$R_5 < \frac{e^{1/3}}{29160} < \frac{3^{1/3}}{29160} < 0{,}00005$$

olur. Buna göre bulunan sonucun dört ondalığı doğru olacaktır.

ÖRNEK 2. Hata 0,0001 den küçük olmak şartiyle hangi aralıkta $\sin x$ yerine x alınabilir?

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} f'''(\theta x)$$

ve

$$f'''(x) = -\cos \theta \quad ; \quad f'''(\theta x) = -\cos \theta x$$

olarak

$$|R| = \left| \frac{x^3}{3!} f'''(\theta x) \right| = \left| \frac{x^3}{3!} (-\cos \theta x) \right|$$

dir. $\cos \theta x$ in en büyük değeri 1 olup

$$|R| < \left| \frac{x^3}{3!} \right| < 0{,}0001$$

$$x^3 < 0{,}0006 \quad ; \quad x < \sqrt[3]{0{,}0006}$$

$$x < 0{,}0843 \text{ radyan} \quad \text{veya} \quad x < 4^0 50'$$

bulunur.

16.8 Serilerle işlemler.

16.8 - 1. Serilerin toplanması.

İki kuvvet serisini terim terim toplamak suretile yeni bir kuvvet serisi elde edilebilir. Elde edilen seri, verilen serilerin ortak yakınsaklık aralığını, yakınsaklık aralığı olarak kabul eder

Örneğin

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots$$

serileri verilmiş olsun. Bu serileri toplarsak, $f(x) + g(x)$ i temsil eden

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + (a_2 + b_2)\,x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n + \ldots$$

serisi elde edilir. Bu serinin yakınsaklık aralığı, toplanan serilerin ortak yakınsaklık aralığıdır.

ÖRNEK 1.
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

serilerinin toplamı olan seriyi ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Toplam olan seri

$$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots .\right)$$

dir. Toplanan serilerden birincisinin yakınsaklık aralığı $-1 < x \leq +1$ ve ikincisininki $-1 \leq x < 1$ olup toplam olarak elde edilen serinin yakınsaklık aralığı $-1 < x < +1$ dir.

ÖRNEK 2. $\frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$ fonksiyonunu seriye açınız.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

olup

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

dir.

16.8 - 2. Serilerin çarpılması.

İki kuvvet serisi çarpılmak suretile yeni bir kuvvet serisi elde edilebilir. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığı, çarpılan serilerin ortak yakınsaklık aralığıdır.

Örneğin

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots$$

serileri çarpılarak

$$\boxed{f(x)\,g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\,x^2 + \ldots}$$

serisi elde edilir. Bu seri, çarpılan serilerin ortak yakınsaklık aralığı içinde $f(x) \,.\, g(x)$ fonksiyonunu temsil eder. Serinin genel terimi

$$\boxed{(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)\,x^n}$$

dir.

ÖRNEK 1.
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

serilerinin çarpılması suretile $\dfrac{1}{1-x^2}$ yi temsil eden

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + (-1+1)\,x + (1-1+1)\,x^2 + (-1+1-1+1)\,x^3 + \ldots$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots}$$

serisi elde edilir. Bu serinin yakınsaklık aralığı verilen serilerin ortak yakınsaklık aralığı olan $-1 < x < +1$ aralığıdır.

ÖRNEK 2. $e^x \cos x$ fonksiyonunu, serilerin çarpımından faydalanarak, seriye açınız.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \ldots$$

$$\cos x = 1 \qquad - \frac{x^2}{2} \qquad + \frac{x^4}{24} \qquad - \frac{x^6}{720} + \ldots$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \ldots$$

$$- \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{48} - \ldots$$

$$+ \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^6}{48} + \ldots$$

$$- \frac{x^6}{720} - \ldots$$

$$1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + 0 . x^6 + \ldots$$

olarak

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \ldots$$

elde edilir

16.8 - 3. Serilerin bölünmesi.

Bir kuvvet serisi diğer bir kuvvet serisine bölünmek suretile yeni bir seri elde edilebilir.

Örneğin

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ..$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

ise

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b^2_0} x + \ldots .$$

dir. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığı, ekseriya verilen serilerin ortak yakınsaklık aralığından daha küçüktür.

ÖRNEK 1. $f(x) = \operatorname{tg} x$ i, serilerin bölünmesinden faydalanarak, seriye açınız.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots}$$

olup $\sin x$ serisi $\cos x$ serisine bölünürse

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots \\
\hline
x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \ldots & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots \\
\hline
+ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \ldots & \\
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \ldots & \\
\hline
+ \frac{2x^5}{15} + \ldots &
\end{array}$$

ve

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots}$$

elde edilir.

ÖRNEK 2. $x^2 \operatorname{cosec}^2 x$ fonksiyonunu x^4 lü terime kadar, seriye açınız.

$$x^2 \operatorname{cosec}^2 x = \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots .$$

olup

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)^2$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{2}{120} + \frac{1}{36}\right)x^6 + \dots$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \dots$$

ve

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{x^2}{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \dots} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 + \dots}$$

olup bölme işlemi yapılırsa

$$x^2 \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 + \dots$$

elde edilir.

16.8 - 4. Serilerin türetilmesi.

$f(x)$ fonksiyonunu temsil eden bir seri, terim terim türetilmek suretile, $f(x)$ in türevi olan $f'(x)$ fonksiyonunu, verilen serinin yakınsaklık aralığında temsil eden bir seri elde edilir. Örneğin

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

serisi $f(x)$ i $-r < x < +r$ aralığında temsil ediyorsa

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \dots + n\,a_n x^{n-1} + \dots$$

serisi de $f'(x)$ türev fonksiyonunu $-r < x < +r$ aralığında temsil eder.

Ancak, bazen $f(x)$ i temsil eden seri yakınsaklık aralığının sınır noktalarında yakınsak olduğu halde, $f'(x)$ i temsil eden seri bu sınır noktalarının birinde veya her ikisinde ıraksak olabilir. Bu bakımdan, her sefer $f'(x)$ serisinin, $f(x)$ serisinin yakınsaklık aralığının sınır noktalarında yakınsak veya ıraksak olduğu ayrıca araştırılmalıdır.

Örneğin

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

serisi $-1 \leq x < 1$ için yakınsak olduğu halde

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

serisi $x = -1$ için yakınsak değildir.

ÖRNEK 1. $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

olup her iki taraf türetilirse

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n\,x^{n-1} + \ldots$$

serisi elde edilir.

ÖRNEK 2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

serisinden, türetme yolu ile $\cos x$ serisini bulunuz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

olup

$$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n (2n+1)\, x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

dir.

ÖRNEK 3 Türetme yardımiyle

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

serisinin toplamını bulunuz.

Serinin yakınsaklık aralığı $-1 \leq x < 1$ olup

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

farzedelim. İfadenin her iki tarafının türevlerini eşitlersek

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

elde edilir ki bu da ortak çarpanı x olan bir geometrik seridir. $|x| < 1$ olup

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

dir. Buna göre

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

olup

$$f(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\log(1-x) + C$$

dır. $x = 0$ için $f(0) = 0$ olup

$$0 = -\log 1 + C \quad ; \quad C = 0$$

olarak verilen serinin toplamı

$$f(x) = -\log(1-x)$$

dir.

16.8 - 5. Serilerin integrasyonu.

$f(x)$ i temsil eden bir serinin terim terim integrali alınarak, $f(x)$ in integrali olan fonksiyonu temsil eden bir seri elde edilir.

ÖRNEK 1. $\dfrac{1}{1+x^2}$ nin serisinden faydalanarak $\operatorname{Arctg} x$ in serisini bulunuz.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + \operatorname{Arctg} x$$

ve

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

olup

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)\, dx$$

$$\operatorname{Arctg} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ..$$

bulunur. $x = 0$ için $\operatorname{Arctg} 0 = 0$ olduğu gözönüne alınırsa $C = 0$ olduğu kolayca görülür. Buna göre

$$\boxed{\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots}$$

dir.

16.8 - 6. Belirli integrallerin seriler yardımiyle hesabı:

Integral hesabı sırasında, belirli integrallerin hesabı belirsiz integraller yardımiyle yapılmıştı. Eğer, integral işareti altındaki fonksiyonun ilkel fonksiyonu elemanter bir fonksiyon değilse, bu yoldan sonuca gitmek mümkün olmaz. Bu hallerde, integral işareti altındaki fonksiyonu kuvvet serisine açıp, elde edilen serinin terim terim integrali hesaplanmak suretile, verilen belirli integralin yaklaşık bir değeri bulunabilir.

Örneğin

$$\int_0^a e^{-x^2} dx$$

integralini hesaplamak isteyelim. $\int e^{-x^2} dx$ belirsiz integralini elemanter fonksiyonlarla ifade edemiyeceğimizden, bu integrali e^{-x^2} yi seriye açmak suretile hesaplamak gerekir.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots.$$

olup

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \left| x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \dots \right|_0^a$$

$$= a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{10} - \frac{a^7}{42} + \dots$$

bulunur. İkinci taraftaki seri verilen integralin yaklaşık bir değerini verir.

ÖRNEK 1. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ integralini hesaplayınız.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \ldots$$

olup

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \ldots\right) dx$$

$$= \left| x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280} + \ldots \right|_0^1$$

$$= 1 - 0{,}05556 + 0{,}00167 - 0{,}00003$$

$$= 0{,}9461$$

dır.

ÖRNEK 2. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ integralini 0,0001 yakınlıkla hesaplayınız.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \ldots$$

olup

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \left| x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^9}{9.4!} - \frac{x^{11}}{11.5!} + \ldots \right|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \ldots$$

$$= 1 - 0{,}33333 + 0{,}10000 - 0{,}02380 + 0{,}00462 - 0{,}00075 + 0{,}00010 - \ldots$$

$$= 0{,}7468$$

dir.

ÖRNEK 3. $\int_0^1 \sin x^2 dx$ integralini hesaplayınız.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots$$

olup

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots\right) dx$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^{11}}{11.5!} - \dots \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7.3!} + \frac{1}{11.5!} - \dots$$

$$= 0{,}33333 - 0{,}02381 + 0{,}00076 - \dots$$

$$= 0{,}31028$$

dir.

16.8 - 7. Belirsiz şekillerin seriler yardımiyle hesabı.

Belirsiz şekillerin hesabı, birçok hallerde seriler yardımiyle daha kolayca yapılabilir. Bunları da birkaç örnekle göstereceğiz.

ÖRNEK 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ i hesaplayınız.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

olup

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) = 1$$

dir.

ÖRNEK 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt[4]{x+16} - 2}$ limitini hesaplayınız.

$$\frac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt[4]{x+16} - 2} = \frac{3}{2}\,\frac{\left(1 + \dfrac{x}{27}\right)^{1/3} - 1}{\left(1 + \dfrac{x}{16}\right)^{1/4} - 1}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{27} + \lambda x^2 + \ldots - 1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{16} + \beta x^2 + \ldots - 1}$$

$$= \frac{\frac{x}{27} + 3\lambda x^2 + \ldots}{\frac{x}{32} + 2\beta x^2 + \ldots} = \frac{\frac{1}{27} + 3\lambda x + \ldots}{\frac{1}{32} + 2\beta x + \ldots}$$

olup

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt[4]{x+16} - 2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{27} + 3\lambda x + \ldots}{\frac{1}{32} + 2\beta x + \ldots} = \frac{32}{27}$$

dir.

ÖRNEK 3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x}$ limitini hesaplayınız.

$$\frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x} =$$

$$= \frac{1 + 2\left[1 - \frac{3}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)\sin^4 x - \ldots\right] - 3\left(1 - \frac{2}{2}\sin^2 x - \frac{1}{8} \cdot 4\sin^4 x + \ldots\right)}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\sin^4 x + \frac{3}{2}\sin^4 x + \ldots}{\sin^4 x} = \frac{9}{4} + \lambda \sin^2 x + \ldots$$

olup

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{9}{4} + \lambda \sin^2 x + \ldots\right) = \frac{9}{4}$$

dir.

16. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

Aşağıdaki serilerin genel terimlerini yazınız.

1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots$ Cevap. $\frac{1}{2n-1}$

2) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\dots$ Cevap. $\frac{n}{2^{n-1}}$

3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\dots$ Cevap. $\frac{1}{n(n+1)}$

4) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\dots$ Cevap. $\frac{2n}{3n+2}$

5) $1+\frac{1.3}{1.4}+\frac{1.3.5}{1.4.7}+\frac{1.3.5.7}{1.4.7.10}+\dots$ Cevap. $\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.4.7\dots(3n-2)}$

Aşağıda genel terimleri verilmiş serilerin ilk 4 veya 5 terimini yazınız.

6) $u_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$

7) $u_n=\frac{(-1)^n n}{2^n}$

8) $u_n=\frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$

9) $u_n=\frac{\left(2+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$

Aşağıdaki serilerin karakterlerini mukayese kuralı ile belirtiniz.

10) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\dots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\dots$ Cevap. yakınsak

11) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\dots+\frac{n+1}{2n+1}+\dots$ Cevap. ıraksak

12) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2n}+\dots$ Cevap. ıraksak

13) $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\dots+\frac{1}{10n+1}+\dots$ Cevap. ıraksak

14) $\frac{1}{\sqrt{1.2}}+\frac{1}{\sqrt{2.3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\dots$ Cevap. ıraksak

15) $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$ Cevap. ıraksak

16) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$ Cevap. yakınsak

17) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{n}}{(n-1)\sqrt{n}}+\ldots$ Cevap. yakınsak

Aşağıdaki serilerin karakterlerini D'Alembert oran kuralı ile belirtiniz.

18) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$ Cevap yakınsak

19) $\frac{2}{1}+\frac{2.5}{1.5}+\frac{2.5.8}{1.5.9}+\ldots+\frac{2.5.8\ldots(3n-1)}{1.5.9\ldots(4n-3)}+\ldots$ Cevap. yakınsak

Aşağıdaki serilerin karakterlerini Cauchy kuralı ile belirtiniz

20) $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$ Cevap. yakınsak

21) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\ldots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\ldots$ Cevap. yakınsak

Aşağıdaki pozitif terimli serilerin karakterlerini belirtiniz.

22) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ Cevap. yakınsak

23) $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\ldots$ Cevap. yakınsak

24) $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$ Cevap. yakınsak

25) $\frac{3}{2^2.3^2}+\frac{5}{3^2.4^2}+\frac{7}{4^2.5^2}+\ldots+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\ldots$ Cevap. yakınsak

26) $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\ldots$ Cevap. ıraksak

27) $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$ Cevap. yakınsak

28) $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^2}+\ldots$ Cevap. ıraksak

29) $\frac{1!}{2+1}+\frac{2!}{2^2+1}+\frac{3!}{2^3+1}+\ldots+\frac{n!}{2^n+1}+\ldots$ Cevap. ıraksak

30) $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$ Cevap. yakınsak

31) $1+\frac{1.4}{1.3.5}+\frac{1.4.9}{1.3.5.7.9}+\ldots+\frac{1.4.9\ldots n^2}{1.3.5.7\ldots(4n-3)}+\ldots$

Cevap. yakınsak

32) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ Cevap. ıraksak

33) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ Cevap. yakınsak

34) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2+1}{n^2}$ Cevap. yakınsak

35) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ Cevap. ıraksak

36) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ Cevap. ıraksak

37) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ Cevap. yakınsak

38) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ Cevap. yakınsak

39) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ Cevap. ıraksak

40) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}$ Cevap. yakınsak

41) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$ Cevap. yakınsak

42) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Cevap. yakınsak

43) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$ Cevap. yakınsak

44) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$ Cevap. ıraksak

45) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\, n!}{n^n}$ Cevap. ıraksak

Aşağıdaki alternatif serilerin ıraksak, mutlak yakınsak veya şarta bağlı yakınsak olduklarını belirtiniz.

46) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \ldots$ Cevap. şarta bağlı yakınsak

47) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots$ Cevap. şarta bağlı yakınsak

48) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$ Cevap. mutlak yakınsak

49) $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\, n}{6n-5} + \ldots$ Cevap. ıraksak

50) $\frac{3}{1.2}-\frac{5}{2.3}+\frac{7}{3.4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+\ldots$

Cevap. şarta bağlı yakınsak

51) $-\frac{2}{2\sqrt{2}-1}+\frac{3}{3\sqrt{3}-1}-\frac{4}{4\sqrt{4}-1}+\ldots+(-1)^{n}\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}+\ldots$

Cevap. şarta bağlı yakınsak

52) $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^{2}-\left(\frac{7}{10}\right)^{3}+\ldots+(-1)^{n}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n}+\ldots$

Cevap. mutlak yakınsak

53) $\frac{3}{2}-\frac{3.5}{2.5}+\frac{3.5.7}{2.5.8}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.5.8\ldots(3n-1)}+\ldots$

Cevap. mutlak yakınsak

54) $\frac{\sin\alpha}{\log 10}+\frac{\sin 2\alpha}{(\log 10)^{2}}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{(\log 10)^{n}}+\ldots$ Cevap. mutlak yakınsak

55) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\log n}{n}$ Cevap. şarta bağlı yakınsak

56) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ Cevap. mutlak yakınsak

Aşağıdaki serilerin yakınsak olduklarını gösteriniz ve toplamlarını hesaplayınız.

57) $5+\frac{5}{7}+\ldots+\frac{5}{7^{n-1}}+\ldots$ Cevap. $S=\frac{35}{6}$

58) $\pi+\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{\pi}{\sqrt{2^{n-1}}}+\ldots$ Cevap. $S=\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

59) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

yol gösterme: $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ olduğunu gözönüne alınız.

60) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

yol gösterme : $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$ olduğunu göz-önüne alınız.

61) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+p)!}$$

yol gösterme : $\frac{(n-1)!}{(n+p)!} = \frac{1}{p}\left[\frac{(n-1)!}{(n-1+p)!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right]$ olduğunu göz-önüne alınız.

62) İlk n teriminin toplamı $S_n = \frac{n}{2n+1}$ olan seriyi belirtiniz ve seri yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm. $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} = \frac{1}{4n^2-1}$

olup seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ dir. Yakınsak olan bu serinin toplamı

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

dir.

63) İlk n teriminin toplamı $S_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ olan seriyi belirtiniz ve seri yakınsak ise toplamını bulunuz.

Cevap. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n^2+1)(n^2-2n+2)}$ ve $S = 1$

Aşağıdaki serilerin toplamlarını cevaplarda gösterilen ondalığa kadar hesaplayınız.

64) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2(n-1)}} + \ldots$ Cevap. 0,800

65) $1-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ Cevap. 0,969

66) $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots$ Cevap. 0,368

67) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ Cevap. 0,84147

68) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{10^{2n}}$ Cevap. 0,009609

69) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+4)!}$ Cevap. 0,0285

70) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ Cevap. 1,5431

71) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\ldots$ Cevap.. 0,3125

72) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{3.4}\cdot\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)10^{n-1}}+\ldots$

Cevap. 0,5176

Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık aralıklarını bulunuz.

73) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ Cevap. $x>1$

74) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ Cevap. $-\infty<x<+\infty$

75) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$ Cevap. $-\infty<x<+\infty$

76) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$ **Cevap.** daima ıraksak

77) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ **Cevap.** $-2 \leqq x < 2$

78) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ **Cevap.** $-1 < x < 1$

79) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ **Cevap.** $-1 < x \leqq 1$

80) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ **Cevap.** $-\infty < x < +\infty$

81) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$ **Cevap.** $-4 < x < +4$

82) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{n^n}$ **Cevap.** $-e < x < e$

83) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \log n}$ **Cevap.** $-3 \leqq x < 3$

84) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n^n}$ **Cevap.** $-1 \leqq x \leqq +1$

85) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$ **Cevap.** $2 < x \leqq 8$

86) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$ **Cevap.** $-2 < x < 4$

87) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)\,2^n}$ Cevap. $0 \leqq x < 4$

88) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$ Cevap. $-e-3 < x < e-3$

89) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$ Cevap. $1 < x \leqq -3$

90) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}$ Cevap. $1 \leqq x < 5$

91) $f(x) = a^x$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Cevap. $a^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (\log a)^n}{n!}$; $-\infty < x < +\infty$

92) $f(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Cevap. $\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

$-\infty < x < +\infty$

93) $f(x) = x\,e^{-2x}$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Cevap. $x\, e^{-2x} = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 2^{n-1}\, x^n}{(n-1)!}$; $-\infty < x < +\infty$

94) $f(x) = \sin 3x + x \cos 3x$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Cevap. $\sin 3x + x \cos 3x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)\, 3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$-\infty < x < +\infty$

95) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\text{Cevap.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{4n-3}\, x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \; -\infty < x < +\infty$$

96) $f(x) = (1 + x)\; e^{-x}$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\text{Cevap.} \quad (1 + x)\; e^{-x} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n \; ; (-\infty < x < +\infty)$$

97) $f(x) = (1 + e^x)^3$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\text{Cevap.} \quad (1 + e^x)^3 = 8 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{n!} x^n \; ; \; (-\infty < x < +\infty)$$

98) $f(x) = \text{ch}^3 x$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\text{Cevap.} \; \text{ch}^3 x = 1 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 3^{2n-1})\, x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad |x| < \infty$$

99) $f(x) = \log(x^2 + 3x + 2)$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\text{Cevap.} \; \log(x^2 + 3x + 2) = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + 2^{-n}) \frac{x^n}{n}$$

$$(-1 < x \leqq +1)$$

100) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$ fonksiyonunu seriye açınız ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\text{Cevap.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad ; \quad (-\infty < x < +\infty)$$

101) $f(x) = \text{th}\, x$ fonksiyonunun serisinin sıfır olmayan ilk üç terimini bulunuz.

Cevap. $\text{th}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots$

102) $f(x) = e^{\cos x}$ fonksiyonunun serisinin sıfır olmayan ilk üç terimini bulunuz.

Cevap. $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \dots\right).$

103) $e^x \sin x$ fonksiyonunun serisinin sıfır olmayan ilk üç terimini bulunuz.

Cevap. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

104) $\frac{1}{x}$ fonksiyonunu $x - 1$ in kuvvetlerine göre seriye açınız.

Cevap. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$

105) e^x fonksiyonunu $x + 2$ nin kuvvetlerine göre seriye açınız.

Cevap. $e^{-2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}\right]$

106) $\cos x$ fonksiyonunu $x - \frac{\pi}{2}$ nin kuvvetlerine göre seriye açınız.

Cevap. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

107) $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ alınırsa yapılan hata ne olur?

Cevap. $|R| < \frac{e}{5!} < \frac{1}{40}$

108) $\cos 18^\circ$ yi 0,001 yakınlıkla hesaplıyabilmek için

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

serisinde kaç terim alınmalıdır?

Cevap. iki terim.

109) $\sin 15°$ yi 0,0001 yakınlıkla hesaplıyabilmek için

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

serisinde kaç terim alınmalıdır?

Cevap. iki terim.

110) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ serisinden e yi 0,0001 yakınlıkla hesaplıyabilmek için kaç terim almalıdır?

Cevap. 8 terim.

111) $\sqrt[3]{7}$ yi 0,01 yakınlıkla hesaplayınız.

Cevap. $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ den faydalan. $\sqrt[3]{7} = 1,92$

112) $\sqrt[4]{19}$ u 0,001 yakınlıkla hesaplayınız.

Cevap. 2,087

113) $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}\, dx$ integralini 0,0001 yakınlıkla hesaplayınız.

Cevap. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 . 3 . 3!} \approx 0,4931$

114) $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ integralini 0,0001 yakınlıkla hesaplayınız.

Cevap. 0,7468

115) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ integralini 0,001 yakınlıkla hesaplayınız.

Cevap. 0,621

116) $\int_0^{1/9} \sqrt{x}\, e^x \, dx$ integralini 0,001 yakınlıkla hesaplayınız.

Cevap. 0,026

117) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}$ Cevap. $\dfrac{1}{6}$

118) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$ Cevap. $\dfrac{1}{2}$

119) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \sin x}{x^3}$ Cevap. $\dfrac{1}{3}$

120) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$ Cevap. 1

121) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\, e^x - \sin x}{\sin^2 x}$. Cevap. 1

122) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x(1 - \cos x)}$ Cevap. $-\dfrac{2}{3}$

123) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \operatorname{tg} x - \sin 2x}{x^3}$ Cevap. 2

124) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - 2 \sin x}{x^3}$ Cevap. 3

125) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + \cos x + \sin x - 2}{x \sin^2 x}$ Cevap. $-\dfrac{1}{3}$

17. BÖLÜM

FOURİER SERİLERİ

17.1. Tanım.

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ \dots$$

şeklindeki bir seriye *trigonometrik seri* denir. Bu seri daha kısa olarak

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

şeklinde gösterilebilir. a_0 a_n ve b_n ler trigonometrik serinin katsayılarıdır. $(n = 1, 2, 3, \dots)$

(1) serisi yakınsak ise toplamı, 2π peryodlu bir $f(x)$ fonksiyonudur. Çünkü $\sin nx$, $\cos nx$ fonksiyonları 2π peryodlu peryodik fonksiyonlardır. O halde $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

olacak şekilde bir fonksiyondur.

Şimdi biz, verilen 2π peryodlu bir $f(x)$ fonksiyonunun, yakınsak bir trigonometrik seri ile temsil edilebilmesinin hangi şartlarla mümkün olabileceğini araştıracağız. Bu araştırma bu bahsin konusu olacaktır.

17.1 - 1. Serinin katsayılarının belirtilmesi.

2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunun, $(-\pi, +\pi)$ aralığında yakınsak bir trigonometrik seri ile temsil edilmiş olduğunu farzedelim. Yani

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2)$$

olduğunu kabul ediyoruz.

Birinci taraftaki fonksiyonun integralinin, (2) serisinin terimlerinin integrallerinin toplamına eşit olduğunu farzediyoruz.

İlk olarak a_0 ı hesaplamak üzere (2) ifadesinin her iki tarafının $-\pi$ den $+\pi$ ye kadar terim terim integrallerini hesaplıyalım. Bu takdirde

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\,dx \right]$$

elde edilir. İkinci taraftaki herbir integrali hesaplarsak :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\,dx = \left| \frac{\sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\,dx = \left| -\frac{\cos nx}{n} \right|_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

elde edilir. Buna göre

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$$

ve buradan da

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx} \qquad (3)$$

bulunur.

Diğer katsayıları hesaplıyabilmek için evvelâ aşağıdaki yardımcı integralleri hatırlayalım. n ve k tam sayılar olarak :

$n \neq k$ ise

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos kx \, dx = 0 \quad ; \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \sin kx \, dx = 0 \quad ;$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin kx \, dx = 0$$

ve $n = k$ ise

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi \quad ; \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos kx \, dx = 0 \; ; \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi$$

dir. Bunlar yardımiyle (2) serisinin a_k, b_k katsayıları hesaplanabilir.

$k \neq 0$ olarak a_k yi hesaplamak için, (2) eşitliğinin her iki tarafını terim terim $\cos kx$ ile çarpalım. Böylelikle

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının $-\pi$ den $+\pi$ ye kadar integralini hesaplıyalım :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right)$$

İkinci taraftaki terimlerden a_k katsayılı olanı hariç hepsi, yukarıda hatırlattığımız yardımcı integrallere göre, sıfır olacağından

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi \, a_k$$

ve buradan da

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx} \qquad (4)$$

elde edilir.

b_k katsayılarını belirtmek için de (2) eşitliğinin her iki tarafını $\sin kx$ le çarpalım ve herbir terimin $-\pi$ den $+\pi$ ye kadar integrallerini hesaplıyalım. Bu takdirde

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \sin kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin kx \, dx \right)$$

elde edilir. Buradan da ikinci taraftaki terimlerden b_k katsayılı olanı hariç, hepsi, yukarıda hatırlattığımız, yardımcı integrallere göre, sıfır olacağından

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx = b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi b_k$$

ve buradan da

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx} \tag{5}$$

elde edilir.

(3) , (4) , (5) formülleri ile tanımlı katsayılara $f(x)$ fonksiyonunun *Fourier katsayıları* ve bu katsayılarla oluşturulmuş (1) trigonometrik serisine de $f(x)$ fonksiyonunun *Fourier serisi* denir.

17.1 - 2. Fourier serisine açılabilme şartları.

Şimdi $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin, yakınsak olabilmesi ve toplamının $f(x)$ e eşit olabilmesi için hangi şartların mevcut olması gerektiğini izaha çalışalım. Bunun için de bir teorem vereceğiz. Evvelâ teoremde bahsi geçecek bir kavramı tanımlayalım.

Tanım. $f(x)$ fonksiyonu $f(c-0)$ ve $f(c+0)$ sonlu değerlerine malik ve

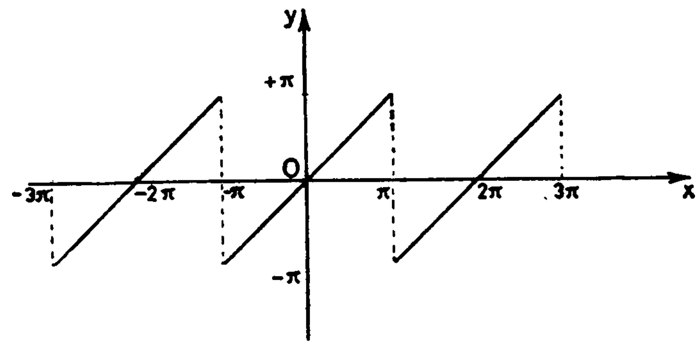
$$f(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}$$

ise $x = c$ noktası $f(x)$ fonksiyonu için bir *düzgün süreksizlik* noktasıdır.

TEOREM. 2π *peryodlu bir* $f(x)$ *fonksiyonu, sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası hariç,* $(-\pi, +\pi)$ *aralığında sürekli ise ve bu aralıkta ancak, sonlu sayıda ekstremum'a malik ise,* $f(x)$ *fonksiyonu,* x *in her değeri için yakınsak olan ve toplamı bu fonksiyona eşit bulunan bir Fourier serisi kabul eder. (Dirichlet şartları).*

ÖRNEK 1. $-\pi < x < +\pi$ aralığında $f(x) = x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Fonksiyon Şekil 145 deki doğru parçalarını gösterir. Fonksiyon Dirichlet şartlarına haizdir. O halde Fourier serisine açılabilir.



Şekil 145

Serinin Fourier katsayıları

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,dx = \left|\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left|\,x\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\,dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left|-x\frac{\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\,dx$$

$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k} = \begin{cases} k \text{ tek ise } = \dfrac{2}{k} \\ k \text{ çift ise } = -\dfrac{2}{k}\end{cases}$$

olup seri

$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \ldots\right]$$

şeklindedir. Bu eşitlik, süreksizlik noktaları hariç, diğer her yerde doğrudur. Sürksizlik noktalarında serinin toplamı fonksiyonun sağdan ve soldan limitlerinin aritmetik ortalaması yani sıfırdır.

İhtar. Uygulamalarda ve örneğin elektroteknikte, 2π peryodlu öyle fonksiyonlar gözönüne alınabilir ki bunların eğrileri, herbirinin denklemi ayrı olan çeşitli yaylardan meydana gelir.

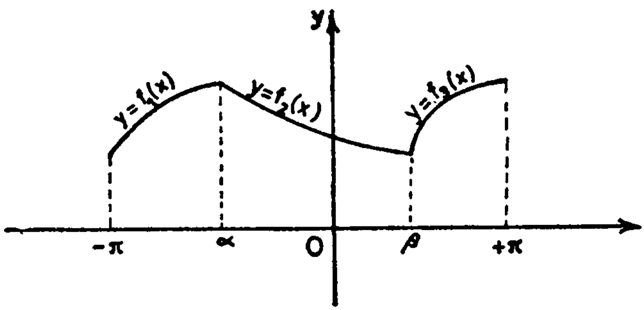
Örneğin $f(x)$ fonksiyonu

$$-\pi < x < \alpha \quad \text{için} \quad f(x) = f_1(x)$$

$$\alpha < x < \beta \quad \text{için} \quad f(x) = f_2(x)$$

$$\beta < x < \pi \quad \text{için} \quad f(x) = f_3(x)$$

olsun. Şekil 146.



Şekil 146

Bu halde, integrasyon aralığı parçalanmış olarak,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$$

yerine

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\alpha} f_1(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)\,dx + \int_{\beta}^{\pi} f_3(x)\,dx\right]$$

yazılmalıdır. Aynı şekilde a_k ve b_k katsayıları için de

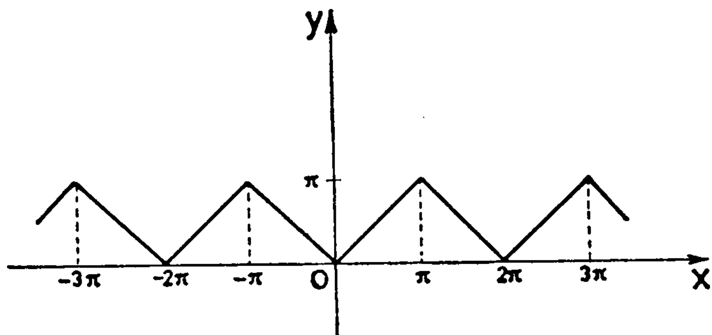
$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\alpha} f_1(x)\cos kx\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)\cos kx\,dx + \int_{\beta}^{+\pi} f_3(x)\cos kx\,dx\right]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\alpha} f_1(x)\sin kx\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)\sin kx\,dx + \int_{\beta}^{+\pi} f_3(x)\sin kx\,dx\right]$$

ifadeleri yazılır.

ÖRNEK 2. $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ aralığında $f(x) = -x$ ve $0 \leqslant x \leqslant \pi$ aralığında $f(x) = x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız. (Aynı fonksiyon $-\pi < x < \pi$ için $f(x) = |x|$ şeklinde de gösterilebilir).

Fonksiyonun eğrisi Şekil 147 de gösterilmiştir.



Şekil 147

Fourier katsayıları :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|-\frac{x\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx + \left|\frac{x\sin kx}{k}\right|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx$$

$$= \frac{1}{k\,\pi}\left|-\frac{\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{0} + \left|\frac{\cos kx}{k}\right|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} k \text{ çift ise} = 0 \\ k \text{ tek ise} = -\dfrac{4}{k^2\pi} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin kx\,dx\right] = 0$$

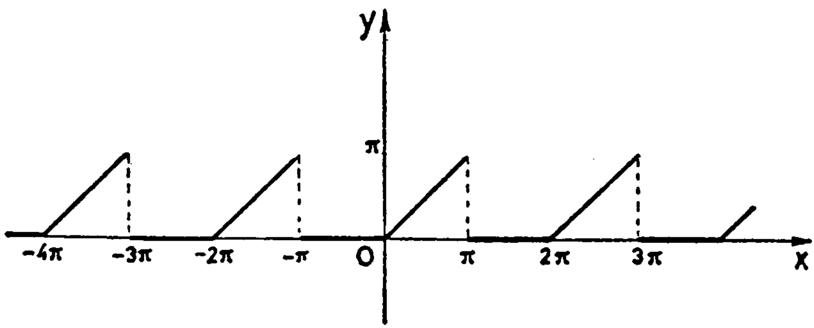
olarak seri

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right]$$

şeklindedir.

ÖRNEK 3. $-\pi < x \leqslant 0$ için $f(x) = 0$ ve $0 \leqslant x < \pi$ için $f(x) = x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Fonksiyonun eğrisi Şekil 148 de gösterilmiş olup Fourier katsayıları



Şekil 148

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left|\frac{x\sin kx}{k}\right|_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{k\,\pi}\left|\frac{\cos kx}{k}\right|_0^\pi = \begin{cases} k \text{ tek ise } = -\dfrac{2}{\pi k^2} \\ k \text{ çift ise } = 0 \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left| -\frac{x\cos kx}{k}\right|_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx\,dx\right]$$

$$= -\frac{\pi}{\pi k}\cos k\pi = \begin{cases} k \text{ tek ise } = \dfrac{1}{k} \\ k \text{ çift ise } = -\dfrac{1}{k} \end{cases}$$

olarak seri

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) + $$
$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$$

şeklindedır.

17.1 - 3. Peryodik fonksiyonların Fourier serisine açılması konusunda bir ihtar.

2π peryodlu bir $\varphi(x)$ fonksiyonu için, λ ne olursa olsun

$$\boxed{\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \varphi(x)\,dx}$$

olduğunu gösterelim.

$\varphi(x)$ fonksiyonu 2π peryodlu olup

$$\varphi(\alpha - 2\pi) = \varphi(\alpha)$$

dır. $x = \alpha - 2\pi$ vazederek c ve d ne olursa olsun

$$\int_c^d \varphi(x)\,dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \varphi(\alpha - 2\pi)\,d\alpha$$

$$= \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \varphi(x)\, dx$$

yazılabilir. Özel olarak $c = -\pi$, $d = \lambda$ alınırsa

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \varphi(x)\, dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \varphi(x)\, dx$$

elde edilir. Diğer taraftan birinci ve ikinci taraflar

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\, dx + \int_{+\pi}^{\lambda} \varphi(x)\, dx = \int_{\pi}^{\lambda} \varphi(x)\, dx + \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \varphi(x)\, dx$$

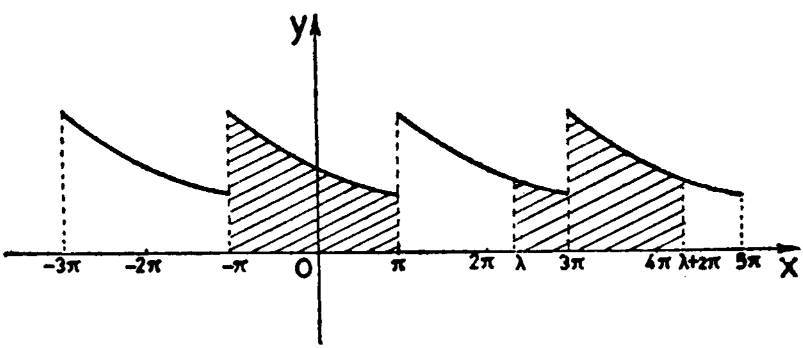
yazılırsa

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\, dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \varphi(x)\, dx$$

bulunur.

Bu özelik, $\varphi(x)$ gibi peryodik bir fonksiyonun, peryoda eşit uzunlukta olan keyfi bir aralıktaki integralinin, daima aynı değere eşit olduğunu gösterir.

Bu özeliği geometrik olarak, Şekil 149 daki taralı alanların birbirine eşit olduğunu görmekle de göstermek mümkündür.



Şekil 149

Bu özelikten şu sonuç çıkarılabilir. Fourier katsayılarının hesabında $(-\pi, +\pi)$ şeklindeki integrasyon aralığı yerine $(\lambda, \lambda + 2\pi)$ aralığı alınabilir. Yani λ keyfi bir sayı olarak

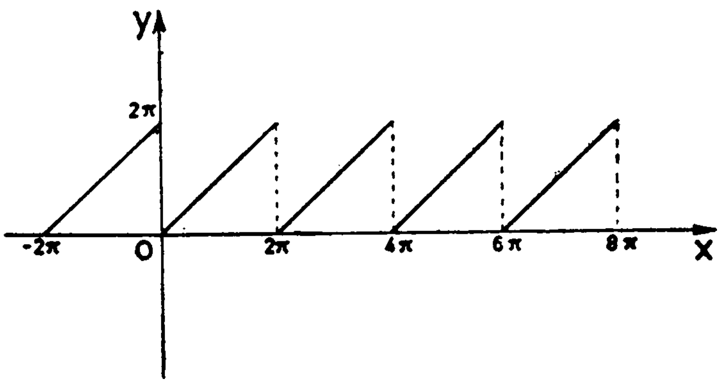
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx \quad , \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos kx\,dx \; ;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

dir.

ÖRNEK. $0 < x < 2\pi$ aralığında $f(x) = x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Fonksiyonun eğrisi Şekil 150 de gösterilmiştir. Bu fonksiyon $(-\pi, +\pi)$ aralığında iki analitik ifade ile tanımlanır. $(-\pi, 0)$ için $f(x) = 2\pi + x$ ve $(0, \pi)$ için $f(x) = x$ dir. Görülüyorki bu fonksiyon $(0, 2\pi)$ aralığında, tek bir analitik ifade ile gösterilebiliyor. O halde, bu fonksiyonu Fourier serisine açmak için, yukardaki formülleri $\lambda = 0$ alarak kullanmalıdır.



Şekil 150

Buna göre

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right|_0^{2\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| -\frac{x \cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right|_0^{2\pi} = -\frac{2}{k}$$

olup

$$f(x) = \pi - 2 \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin 3x - \dots\dots$$

dir. Bu seri süreksizlik noktaları hariç $(x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots)$ diğer değerlerin hepsi için $f(x)$ i temsil eder. Süreksizlik noktalarında serinin toplamı, $f(x)$ in sağdan ve soldan limitlerinin aritmetik ortalamasına yani π ye eşittir.

17.2 - Tek ve çift fonksiyonların Fourier serileri

Çift ve tek fonksiyonların tanımlarından aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

1. $\varphi(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon ise

$$\boxed{\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \, dx = 2 \int_0^{\pi} \varphi(x) \, dx}$$

dir. Gerçekten $\varphi(-x) = \varphi(x)$ olup

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \, dx = \int_{-\pi}^{0} \varphi(x) \, dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \, dx$$

yazılabilir. İkinci tarafın birinci integralinde x yerine $-x$ koymak suretile bir dönüştürme yapılırsa dx yerine $-dx$ ve $-\pi$ yerine de $+\pi$ gelir. Buna göre

$$\int_{-\pi}^{0} \varphi(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} \varphi(-x)\,(-dx) = -\int_{\pi}^{0} \varphi(-x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} \varphi(-x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx$$

elde edilir. Bu sonuç yukarıda yerine konursa

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx$$

bulunur.

2. $\varphi(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon ise

$$\boxed{\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,dx = 0}$$

dır. Gerçekten $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ olup

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx$$

yazılabilir. İkinci tarafın birinci integralinde x yerine $-x$ koymak suretile bir dönüştürme yapılırsa

$$\int_{-\pi}^{0} \varphi(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} \varphi(-x)(-dx) = -\int_{\pi}^{0} \varphi(-x)\,dx$$

$$= -\int_{\pi}^{0} -\varphi(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} \varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx$$

elde edilir. Bu sonuç yukarıda yerine konursa

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,dx = -\int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0$$

bulunur.

Bunlara göre, $f(x)$ gibi bir *tek fonksiyonun Fourier serisine açılımında* karşılaşılacak olan $f(x)\cos kx$ çarpımı tek fonksiyon ve $f(x)\sin kx$ çarpımı çift fonksiyon olarak, Fourier katsayıları

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

dır. O halde *bir tek fonksiyonun Fourier serisi, yalnız sinüslü terimleri içerir.*

Eğer $f(x)$ gibi bir çift fonksiyon Fourier serisine açılıyorsa, katsayıların hesabında karşılaşılacak olan $f(x)\cos kx$ çift fonksiyon ve $f(x)\sin kx$ tek fonksiyon olarak Fourier katsayıları

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

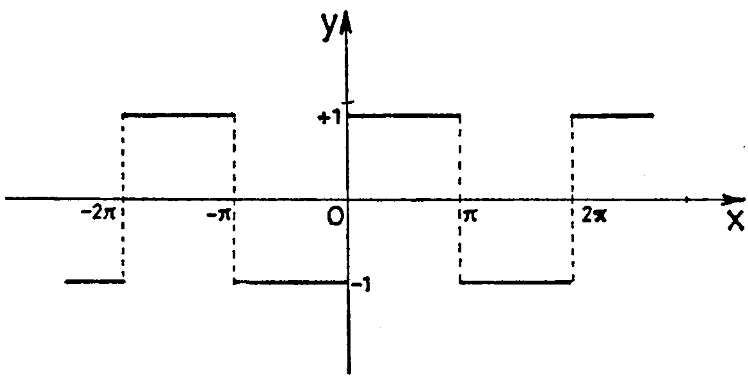
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0$$

olacaktır. O halde *bir çift fonksiyonun Fourier serisinde sinüslü terimler bulunmayacaktır.*

Bu şekilde elde edilen formüller çift veya tek fonksiyonların Fourier katsayılarının hesabını basitleştirir.

ÖRNEK 1. $-\pi < x < 0$ için $f(x) = -1$ ve $0 < x < \pi$ için $f(x) = 1$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Fonksiyonun eğrisi Şekil 151 de gösterilmiş olup fonksiyon tek fonksiyondur.



Şekil 151

Buna göre

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_k = 0$$

olacaktır.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left| -\frac{1}{k}\cos kx\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k}(1-\cos k\pi) = \begin{cases} k \text{ çift ise } = 0 \\ k \text{ tek ise } = \dfrac{4}{k\pi} \end{cases}$$

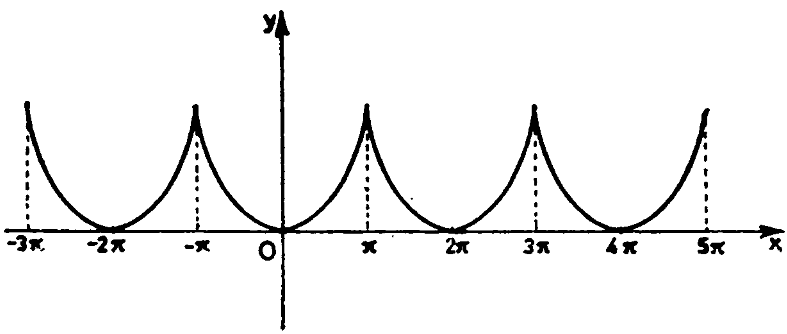
dir. O halde seri

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

dir.

ÖRNEK 2. $-\pi \leq x \leq +\pi$ aralığında $f(x) = x^2$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Fonksiyonun eğrisi Şekil 152 de gösterilmiştir. Fonksiyon çift fonksiyon olup $b_k = 0$ dır.



Şekil 152

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \frac{x^2 \sin kx}{k} \right|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx$$

$$= -\frac{4}{\pi k} \left| -\frac{x \cos kx}{k} \right|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx$$

$$= \frac{4}{\pi k^2} \pi \cos k\pi = \frac{4}{k^2} \cos k\pi$$

dir. Bunlara göre seri

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

şeklindedir.

17.3 - Herhangi peryodlu fonksiyonların Fourier serisi

$f(x)$ fonksiyonu $2l$ peryodlu bir fonksiyon olsun. $l \neq \pi$ farzederek bu fonksiyonu Fourier serisine açmak isteyelim. Bunun için de

$$x = \frac{2l}{2\pi} t = \frac{l}{\pi} t$$

değişken dönüştürmesini yapalım. Bu takdirde

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$$

fonksiyonu t nin 2π peryodlu bir fonksiyonu olur. Çünkü

$$f\left[\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right] = f\left(\frac{l}{\pi} t + 2l\right) = f(x + 2l)$$

$$= f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$$

dır O halde $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ fonksiyonu $-\pi \leq t \leq \pi$ aralığında Fourier serisine açılabilir. Yani

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1}$$

yazılabilir. Burada

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos kt\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin kt\, dt$$

dir. Şimdi de tekrar x değişkenine dönelim.

$$x = \frac{l}{\pi}t \quad , \quad t = \frac{\pi}{l}x \quad , \quad dt = \frac{\pi}{l}dx$$

olarak

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} f(x)\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{k\pi}{l}x\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{k\pi}{l}x\, dx$$

elde edilir Bu takdirde (1) ifadesi de

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos \frac{k\pi}{l}x + b_k \sin \frac{k\pi}{l}x\right)$$

şeklini alır ki bu da bize $2l$ peryodlu bir fonksiyonun Fourier serisini verir

Özet olarak $2l$ peryodlu bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\,dx \quad ; \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

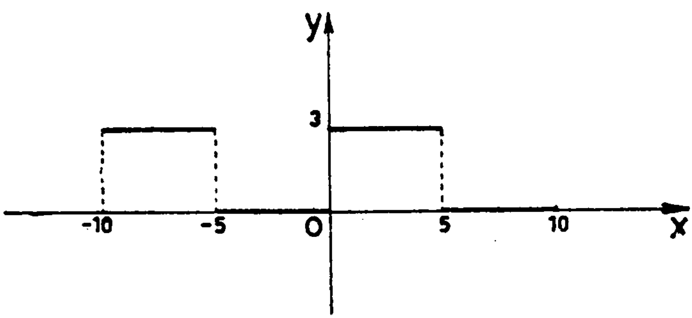
olarak

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right)$$

dir.

ÖRNEK 1. $-5 < x < 0$ için $f(x) = 0$, $0 < x \leqslant +5$ için $f(x) = 3$ olan 10 peryodlu $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisine açınız.

Fonksiyonun eğrisi Şekil 153 de gösterilmiştir. $2l = 10$ olup $l = 5$ dir. O halde



Şekil 153

$$a_0 = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 0\,.\,dx + \int_{0}^{+5} 3\,dx\right] = 3$$

$$a_k = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 0\,.\cos\frac{k\pi}{5}x\,dx + \int_{0}^{5} 3\cos\frac{k\pi}{5}x\,dx\right]$$

$$= \frac{3}{5} \left| \frac{5}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{5} x \right|_0^5 = 0$$

$$b_k = \frac{1}{5} \left[\int_{-5}^{0} 0 \,.\, \sin \frac{k\pi}{5} x \, dx + \int_0^5 3 \sin \frac{k\pi}{5} x \, dx \right]$$

$$= \frac{3}{5} \left| - \frac{5}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{5} x \right|_0^5 = \frac{3(1-\cos k\pi)}{k\pi} = \begin{cases} k \text{ tek ise } = \dfrac{6}{k\pi} \\ k \text{ çift ise } = 0 \end{cases}$$

dır. Buna göre seri

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos k\pi)}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{5} x$$

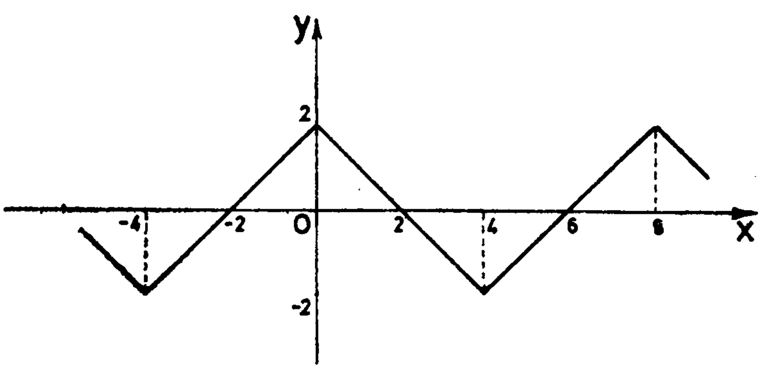
veya

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{5} x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{5} x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{5} x + \ldots \right)$$

dir.

ÖRNEK 2. $0 \leqslant x \leqslant 4$ için $f(x) = 2 - x$, $4 \leqslant x \leqslant 8$ için $f(x) = x - 6$ olan 8 peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Fonksiyonun eğrisi Şekil 154 de gösterilmiş olup fonksiyon çift fonksiyondur. O halde $b_k = 0$ dır.



Şekil 154

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-l}^{+l} f(x)\,dx = \frac{2}{4}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (2-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left| 2x - \frac{1}{2}x^2 \right|_0^4 = 0 \quad ;$$

$$a_k = \frac{2}{4}\int_0^4 (2-x)\cos\frac{k\pi}{4}x\,dx = \frac{8}{k^2\pi^2}\left| -\cos\frac{k\pi}{4}x \right|_0^4$$

$$= \frac{8}{k^2\pi^2}(1-\cos k\pi) = \begin{cases} k \text{ tek ise } = \dfrac{16}{\pi^2 k^2} \\ k \text{ çift ise } = 0 \end{cases}$$

olarak seri

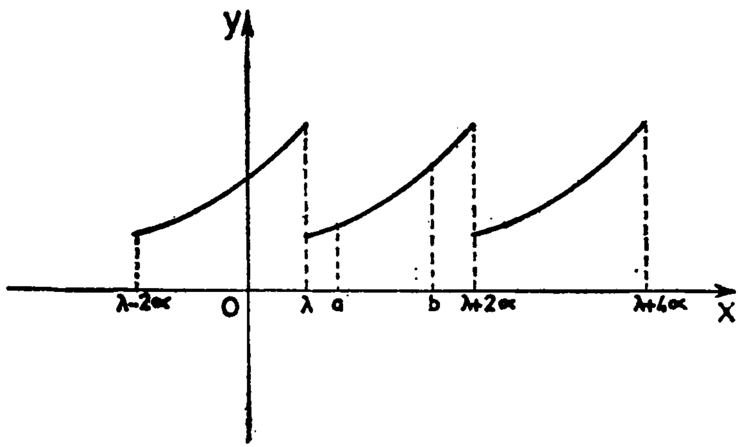
$$f(x) = \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{4}x + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{4}x + \ldots \right)$$

dir.

17.4- Peryodik olmayan bir fonksiyonun Fourier serisine açılımı

$[a, b]$ aralığında tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun sürekli olduğu noktalarda bir Fourier serisine açılabileceğini gösterelim.

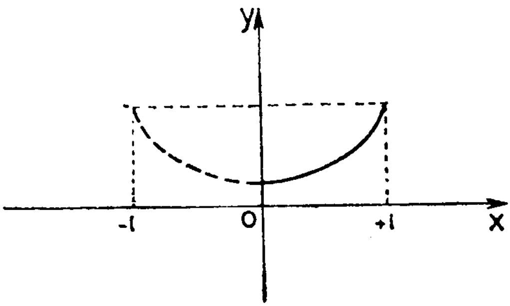
Bunun için de $2\alpha \geq |b-a|$ olacak şekilde 2α peryodlu ve $[a, b]$ aralığında $f(x)$ ile çakışan keyfi bir $f_1(x)$ fonksiyonu göz önüne alalım. $f(x)$ i uzatmakla bu fonksiyon elde edilebilir. (Şekil 155)



Şekil 155

Bu suretle elde edilen $f_1(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açalım. Bu serinin toplamı, $[a, b]$ aralığında $f(x)$ in değerleri ile çakışır. (Süreksizlik noktaları hariç). Buna göre $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Fourier serisine açılmış olur.

Şimdi aşağıdaki önemli bir hali göz önüne alalım. $f(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ aralığında verilmiş bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun göstermiş olduğu eğriyi $[-l, 0]$ aralığında uzatalım. Bu takdirde bu fonksiyonu Fourier serisine açabiliriz. Eğer bu fonksiyonun eğrisini $-l \leqslant x \leqslant 0$ aralığında $f(x) = f(-x)$ olacak şekilde uzatırsak bir çift fonksiyonun eğrisini elde etmiş oluruz. Bu takdirde *fonksiyonun eğrisi, fonksiyon çift olacak şekilde uzatılmıştır* denir. Şekil 156. Bu halde fonksiyonu Fourier serisine açarsak bu seride sinüslü terimler bulunmayacağından $f(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ aralığında *kosinüs Fourier serisine* veya kısaca *kosinüs serisine* açılmış olur.

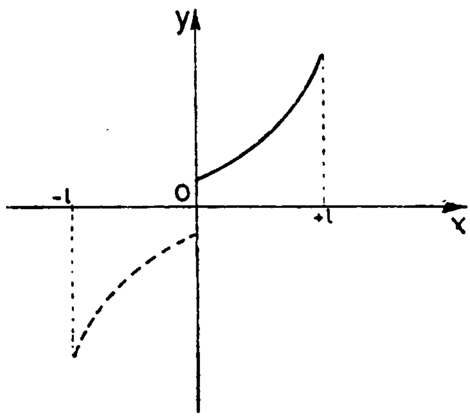


Şekil 156

Eğer $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi $-l < x < 0$ aralığında $f(x) = -f(-x)$ olacak şekilde uzatılırsa bir tek fonksiyonun eğrisi elde edilmiş olur. Bu takdirde fonksiyonun eğrisi $f(x)$ tek fonksiyon olacak şekilde uzatılmış olur. Böylece de $f(x)$ in *sinüs serisi* elde edilir. Şekil 157.

Bunlara göre $[0, l]$ aralığında verilmiş bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier'nin sinüs ve kosinüs serisine açılabileceği gösterilmiş olur.

ÖRNEK 1. $f(x) = x$ fonksiyonunu $[0, \pi]$ aralığında sinüs serisine açınız.

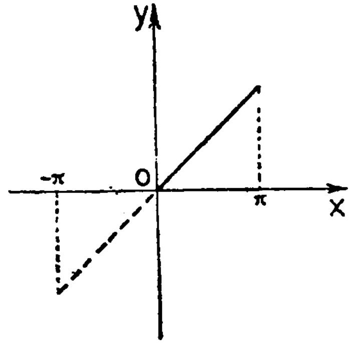


Şekil 157

Bu fonksiyonun eğrisini $[-\pi, 0]$ aralığında, fonksiyon tek fonksiyon olacak şekilde uzatalım. Şekil 158. Bu takdirde $[0 . \pi]$ aralığında

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$

olur. (Bak. 17.1- 2. ÖRNEK 1.)



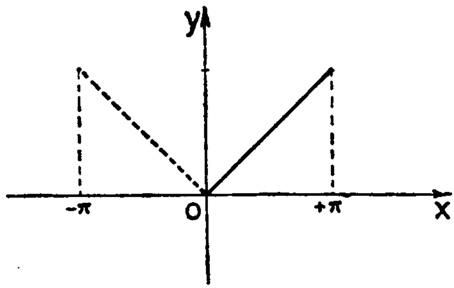
Şekil 158

ÖRNEK 2. $f(x) = x$ fonksiyonunu $[0, \pi]$ aralığında kosinüs serisine açınız.

Bu fonksiyonun eğrisini $(-\pi, 0)$ aralığında fonksiyon çift fonksiyon olacak şekilde uzatalım. Şekil 159. Bu takdirde $-\pi \leq x \leq +\pi$ için $f(x) = |x|$ elde edilir. O halde $[0, \pi]$ aralığında

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

dır. (Bak. 17.1-2. ÖRNEK 2.)

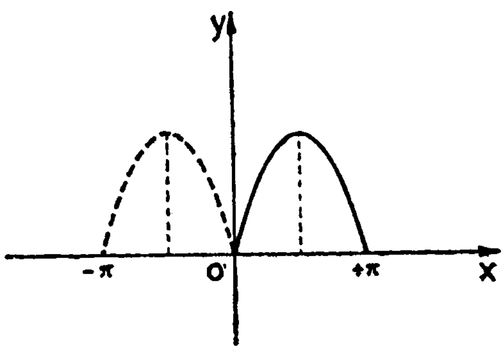


Şekil 159

ÖRNEK 3. $f(x) = x(\pi - x)$ fonksiyonunu $[0, \pi]$ aralığında kosinüs ve sinüs serisine açınız.

1. Kosinüs serisini elde etmek için $f(x)$ in eğrisini, fonksiyon çift fonksiyon olacak şekilde $[-\pi, 0]$ aralığında uzatalım. Şekil 160. Bu takdirde

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\, dx$$



Şekil 160

$$= \frac{2}{\pi} \left| \pi \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3} \quad ;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\cos kx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left|\frac{1}{k}(\pi x - x^2)\sin kx\right|_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi (\pi - 2x)\sin kx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi -(\pi - 2x)\sin kx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left[\left|\frac{1}{k}(\pi - 2x)\cos kx\right|_0^\pi + \frac{2}{k}\int_0^\pi \cos kx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(-\pi\cos k\pi - \pi) = -\frac{2}{k^2}(\cos k\pi + 1) = \begin{cases} k \text{ tek ise } & a_k = 0 \\ k \text{ çift ise } & a_k = -\dfrac{4}{k^2} \end{cases}$$

olarak

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 4\left(\frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} + \dots\right)$$

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots\right)$$

bulunur.

Bu seride $x = \pi$ yapılırsa birinci taraf sıfıra eşit olur ve

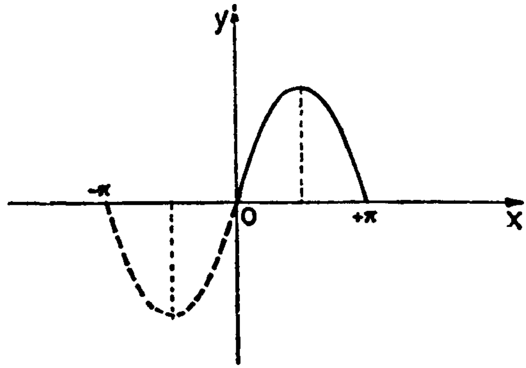
$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

elde edilir. $x = \frac{\pi}{2}$ için ise

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

bulunur.

II. Sinüs serisini elde etmek için de $f(x)$ in eğrisini $f(x)$ tek fonksiyon olacak şekilde $[-\pi, 0]$ aralığında uzatalım. Şekil 161 Bu takdirde



Şekil 161

$$a_0 = 0 \qquad a_k = 0$$

ve

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin kx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin kx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left|-\frac{1}{k}(\pi x - x^2)\cos kx\right|_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos kx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos kx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left[\left|\frac{1}{k}(\pi - 2x)\sin kx\right|_0^\pi + \frac{2}{k}\int_0^\pi \sin kx\, dx\right]$$

$$= \frac{4}{\pi k^2}\left|-\frac{1}{k}\cos kx\right|_0^\pi = \frac{4}{\pi k^3}(1 - \cos k\pi)$$

$$= \begin{cases} k \text{ tek ise } & b_k = \dfrac{8}{\pi k^3} \\ k \text{ çift ise } & b_k = 0 \end{cases}$$

olarak

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right)$$

dir. Özel olarak seri $x = \dfrac{\pi}{2}$ için

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

şeklini alır.

17. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

1) $[-\pi\ ,\ 0]$ için $f(x) = 1$ ve $[0\ ,\ \pi]$ için $f(x) = -1$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$

2) $[-\pi\ ,\ +\pi]$ aralığında $f(x) = \pi^2 - x^2$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \frac{4}{1^2}\cos x - \frac{4}{2^2}\cos 2x + \frac{4}{3^2}\cos 3x - \dots$

3) $[-\pi\ ,\ +\pi]$ aralığında $f(x) = \frac{x^2}{4}$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots$

4) $(-\pi\ ,\ +\pi)$ aralığında $f(x) = e^{2x}$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

$$\text{Cevap.}\quad f(x) = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} - \frac{2(e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2+4} + \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2+4}$$

5) $0 \leq x \leq \pi$ için $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ ve $-\pi \leq x \leq 0$ için $f(x) = \frac{\pi}{2} + x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

6) $-\pi < x < 0$ için $f(x) = \pi + x$ ve $0 < x < \pi$ için $f(x) = \pi - x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$

7) $0 < x < 10$ için $f(x) = 4x$ olan 10 peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = 20 - \frac{40}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{5} x$

8) $[-\pi, 0]$ aralığında $f(x) = -\cos x$ ve $[0, \pi]$ aralığında $f)x) = \cos x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız

Cevap. $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin 2kx}{4k^2 - 1}$

9) $-3 < x < 0$ aralığında $f(x) = 0$ ve $0 < x < 3$ aralığında $f(x) = 2x$ olan 6 peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{6(\cos k\pi - 1)}{k^2\pi^2} \cos \frac{k\pi}{3} x - \frac{6 \cos k\pi}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{3} x\right]$

10) $-\pi < x < 0$ aralığında $f(x) = -\pi$ ve $0 < x < \pi$ aralığında $f(x) = x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2\cos k\pi}{k} \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi - 1}{\pi k^2} \cos kx$

11) $[-\pi, +\pi]$ aralığında $f(x) = \text{ch}\, x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(x) = \frac{2\,\text{sh}\,\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\cos 3x + \frac{1}{17}\cos 4x - ..\right)$

12) $-1 < x < 1$ için $f(x) = |x|$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

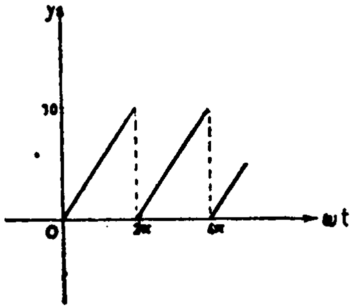
Cevap. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$

13) Eğrisi Şekil 162 de görülen peryodik fonksiyonu Fourier serisine açınız.

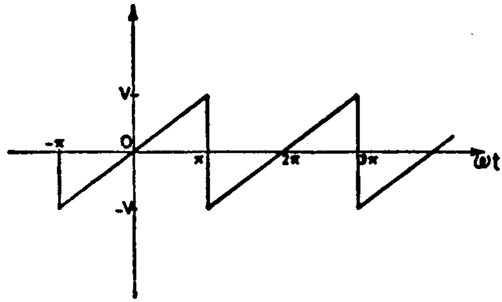
Cevap. $f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k}$

14) Eğrisi Şekil 163 de görülen peryodik fonksiyonu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(t) = \frac{2V}{\pi}\left[\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\, \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\, \omega t - \ldots\right]$



Şekil 162

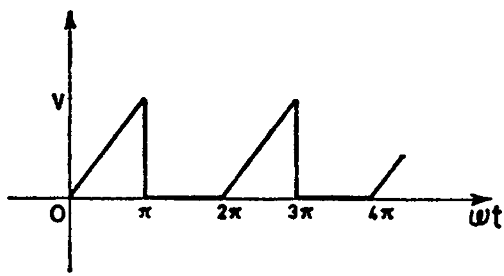


Şekil 163

15) Eğrisi Şekil 164 de görülen peryodik fonksiyonu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2} \cos 3\, \omega t - \ldots +$

$$+ \frac{V}{\pi} \sin \omega t - \frac{V}{2\pi} \sin 2\, \omega t + \frac{V}{3\pi} \sin 3\, \omega t - \ldots$$



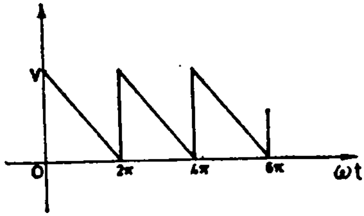
Şekil 164

16) Eğrisi Şekil 165 de gösterilen peryodik fonksiyonu Fourier serisine açınız.

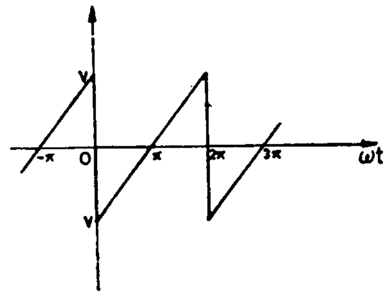
Cevap. $f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\, \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\, \omega t + \ldots\right)$

17). Eğrisi Şekil 166 da gösterilen peryodik fonksiyonu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(t) = \frac{-2V}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\, \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\, \omega t + \ldots\right)$



Şekil 165



Şekil 166

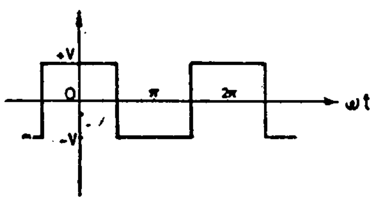
18) Eğrisi Şekil 167 de gösterilen peryodik fonksiyonu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(t) = \frac{4V}{\pi}\left(\cos \omega t - \frac{1}{3}\cos 3\ \omega t + \frac{1}{5}\cos 5\ \omega t - \ldots\right)$

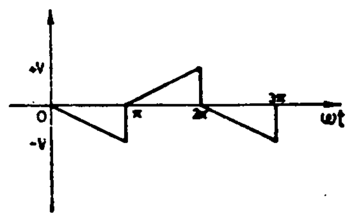
19) Eğrisi Şekil 168 de gösterilen peryodik fonksiyonu Fourier serisine açınız.

Cevap. $f(t) = \frac{4V}{\pi^2}\left(\cos \omega t + \frac{1}{9}\cos 3\ \omega t + \frac{1}{25}\cos 5\ \omega t + \ldots\right) -$

$$\frac{2V}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\ \omega t + \frac{1}{5}\sin 5\ \omega t + \ldots\right)$$



Şekil 167



Şekil 168

20) $[0\ ,\ \pi]$ aralığında $f(x) = mx^3$ olan $f(x)$ fonksiyonunu sinüs serisine açınız.

Cevap. $f(x) = 2m\left[\left(\frac{\pi^2}{1} - \frac{6}{1^3}\right)\sin x - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{6}{2^3}\right)\sin 2x + \right.$

$$\left.\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{6}{2^3}\right)\sin 3x - \ldots\right]$$

21) $0 < x < 1$ için $f(x) = x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu kosinüs serisine açınız.

Cevap. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \ldots\right]$

22) $0 \leqq x \leqq 4$ için $f(x) = x$ ve $4 \leqq x \leqq 8$ için $f(x) = 8 - x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu sinüs serisine açınız.

Cevap. $$f(x) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi x}{8}$$

23) $0 < x \leqq 1$ için $f(x) = x$ ve $1 \leqslant x \leqslant 2$ için $f(x) = 2 - x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu $[0, 2]$ aralığında kosinüs serisine açınız.

Cevap. $$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$$

24) $0 < x < 1$ için $f(x) = 1 - 2x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu $(0, 1)$ aralığında sinüs serisine açınız.

Cevap. $$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \dots\right]$$

25) $\frac{3}{2} < x \leqq 2$ için $f(x) = 1$ ve $2 < x < 3$ için $f(x) = 3 - x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ aralığında kosinüs serisine açınız.

Cevap. $$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \frac{2k\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^2}$$

18. BÖLÜM

KOMPLEKS SAYILAR

18.1 İmajiner ve kompleks sayılar.

18.1 - 1. Giriş.

Diskriminantı negatif olan ikinci derece denklemlerinin köklerinin reel sayılar arasında bulunmayışı; negatif olan reel sayıların çift mertebeden köklerinin reel sayı olarak mevcut olmayışı kompleks sayıların ortaya atılmasına neden olmuştur. Bu nedenlerle ortaya atılan kompleks sayılar, sonraları, Matematikte geniş uygulama alanları bulmuştur. Başta hayali olarak düşünülmüş bu sayıların, reel sayıların olduğu gibi, gerçek bir anlamı, hatta geometrik ve pratik bakımdan hiç de ihmal edilmeyecek bir gösterilimi vardır.

Kompleks sayılarla ortaya atılan bazı kurallar, alternatif akım elektrotekniğinin temelini teşkil eder. Bugün özellikle, elektronik ve zayıf akım tekniğinde kaydedilen ilerlemeler sonunda, artık kompleks sayılarla ortaya atılan işlemler, alternatif akım devreleri için vaz geçilmez ana kurallar halini almıştır. Bu kurallar sayesinde geometrik toplamlar cebirsel toplam haline ve vektörel işlemler skaler işlem şekline sokulmaktadır. Diğer yollarla çok uzun hesaplama yapılmasını icap ettiren problemler, kompleks sayıları kullanarak, gayet kolayca çözülebilmektedir.

18.1 - 2. İmajiner ve kompleks sayı tanımı.

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

denklemini alalım. Bu denklemin kökleri

$$x = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-9}$$

olarak reel değildir.

$$x = 1 \pm 3\sqrt{-1}$$

yazalım.

$$\sqrt{-1} = i$$

olarak kabul edilirse

$$x_1 = 1 - 3i \quad , \quad x_2 = 1 + 3i$$

elde edilir. Bu şekildeki sayılara *kompleks sayı* denir. Burada

$$\sqrt{-1} = i = \textit{imajiner birim}$$

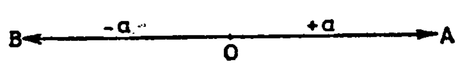
dir. i nin herhangi bir b reel sayısı ile çarpımı şeklinde olan $b\,i$ sayılarına *imajiner sayı* denir a gibi reel bir sayı ile $b\,i$ imajiner sayısının toplamı şeklinde olan

$$a + b\,i$$

sayısına da *kompleks sayı* denir. a, kompleks sayının, *reel kısmı,* $b\,i$ ise kompleks sayının *imajiner kısmı* adını alır. Bir kompleks sayının $a + b\,i$ şeklindeki gösterilimine kartezyen şekilde gösterilim denir.

18.1 - 3. İmajiner sayıların geometrik şekilde gösterilişi.

Yatay bir eksen ve bu eksen üzerinde $+a$ ya eşit OA vektörü ile $-a$ ya eşit OB vektörünü göz önüne alalım. Şekil 169. Şimdi de OA ile gösterilen $+a$ miktarından OB ile gösterilen $-a$ miktarına nasıl geçilebileceğini düşünelim. İki yol



Şekil 169

akla gelebilir. Birincisi *cebirsel yol* olarak, $+a$ yı -1 ile çarpmaktır.

$$+a \,.\, (-1) = -a$$

İkinci yol *geometrik yol* olup OA vektörünü O etrafında pozitif veya negatif yönde 180^0 döndürmektir.

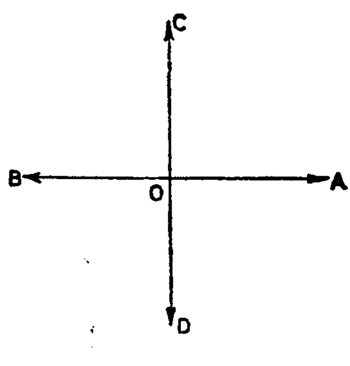
Aynı şekilde, $(-a)(-1) = +a$ veya OB vektörü 180^0 döndürülmek suretile OA vektörü elde edilebilir.

Böylece, bir miktarı -1 ile çarpmanın bu miktarı temsil eden vektörün 180^0 döndürülmesine karşılık olduğu görülmüştür. Bu nedenle (-1) e bir vektörün 180^0 döndürülmesini sağlıyan bir *operatör* denir.

Şimdi de bir vektörün 90^0 döndürülmesi için ne yapmak gerektiğini araştıralım.

OA yı 90^0 döndürüp OC durumuna getirmek için bilmediğimiz ve $+i$ ile göstereceğimiz bir sayı ile çarpmak gerekeceğini (Şekil 170) ve OC yi de 90^0 döndürmek için $+i$ ile çarpılacağını ve $-a$ ya eşit OB vektörünün elde edileceğini düşünelim.

Aynı şekilde, OA yı -90^0 döndürmek için $+a$ yı $-i$ ile çarparak OD yi ve -90^0 döndürmek için $-i$ ile çarparak OB yi yani $-a$ miktarını elde edeceğimizi düşünebiliriz.



Şekil 170

Şimdi bilmediğimiz bu i sayısının değerini araştıralım. OA yı iki defa 90^0 döndürürsek OB yi bulacağımızı ele alalım. O halde OA dan OC ye geçmek için $+a$ yı i ile çarpmamız

$$+i \,.\, a = a\,i$$

ve OC den OB ye geçmek için de OC nin cebirsel değeri olan $a\,i$ yi i ile çarparak $-a$ yı elde etmemiz gerekeceğinden

$$a\,i \,.\, i = a\,i^2 = -a$$

elde edilir. O halde

$$i^2 = -1 \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

elde edilir. Buna göre i nin yukarıda imajiner birim olarak tanımlanmış olan $\sqrt{-1}$ e eşit olduğu sonucuna varılır.

Böylece, yatay bir vektörün uzunluğunu $+i$ ile çarpmak suretile vektör $+90^0$, $-i$ ile çarpmak suretile de -90^0 döndürülmüş olur.

O halde Şekil 170 deki dört vektörün imajiner ifadeleri olarak

$$\overline{OC} = +a\,i \quad , \quad \overline{OD} = -a\,i$$

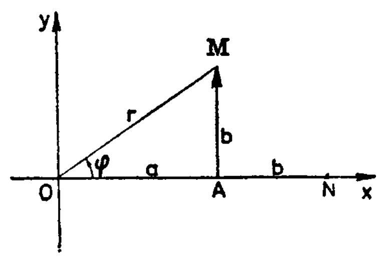
$$\overline{OA} = a \quad , \quad \overline{OB} = -a$$

yazılabilir.

18.1 - 4. Kompleks sayıların geometrik şekilde gösterilişi.

Şimdi de Şekil 171 de gösterilen $\overrightarrow{OM}$ vektörünü göz önüne alalım. OM i ox ekseni üzerinde izdüşürerek kenarları, a, b ve OM olan dik üçgeni meydana getirelim. Buradan $\overrightarrow{OM}$ nin $\overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{AM}$ vektörlerinin toplamına eşit yani

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$



Şekil 171

olduğu görülür. Kompleks sayılar bakımından mühim olan husus, bu geometrik eşitliği, bir cebirsel formül haline getirmektir. $\overrightarrow{AM}$ vektörü düşey durumda olup $b\,i$ ile gösterilebilir. Zira bu vektör, b ye eşit olan $\overrightarrow{AN}$ vektörünün 90^0 döndürülmesi suretile elde edilmiştir. $\overrightarrow{OA}$ vektörü ise a ya eşit olup yukarıdaki geometrik eşitlik yani $\overrightarrow{OM}$ vektörü

$$a + b\,i$$

cebirsel ifadesi ile gösterilmiş olacaktır. O halde a gibi reel bir kısım ve $b\,i$ gibi imajiner bir kısımdan meydana gelmiş olan $a + b\,i$ *ifadesi bir vektörel toplamı göstermiş olur.*

$a + b\,i$ toplamına iki sayının adi toplamı gibi bakabiliriz. Bu suretle, düzlemde verilmiş olan bir $\overrightarrow{OM}$ vektörü $a + b\,i$ gibi bir kompleks sayı ile gösterilmiş olur. Karşıt olarak $a + b\,i$ kompleks sayısının düzlemde $\overrightarrow{OM}$ gibi bir vektörü gösterdiğini söyliyebiliriz. $M(a, b)$ noktasına $a + b\,i$ kompleks sayısının görüntüsü de denir.

$b = 0$ ise $a + b\,i$ ifadesi a reel kısmından ibaret olur ve M noktaları da ox ekseni üzerinde yer alır. Bu nedenle ox eksenine *reel eksen* adı verilir.

$a = 0$ ise $a + b\,i$ ifadesi $b\,i$ imajiner kısmından ibaret olur ve M noktaları da oy ekseni üzerinde yer alır. Bu nedenle oy eksenine *imajiner eksen* adı verilir.

Görülüyor ki reel ve imajiner sayılar, düzlemin yalnız birer ekseni üzerindeki noktalara karşılık gelmektedir. Kompleks sayılar ise düzlemi tüm olarak kapsayarak reel ve imajiner sayıları da içermektedir. Gerçekten bir reel sayı, imajiner kısmı sıfır olan ve bir imajiner sayı da, reel kısmı sıfır olan bir kompleks sayıdır.

Sonuç olarak $a + b\,i$ kompleks sayısı, geometrik bir toplamın cebirsel bir toplam haline getirilmiş şeklidir.

$$\overline{OM} = a + b\,i$$

$a + b\,i$ kompleks ifadesi verilmiş ise $\overrightarrow{OM}$ vektörünün uzunluğu olan r ve ox ekseni ile teşkil ettiği φ açısı kolayca belirtilebilir. Gerçekten Şekil 171 den

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}}$$

yazılabilir. Burada r ye $a + b\,i$ kompleks sayısının *modülü* ve φ ye de sayının *argümanı* denir.

ÖRNEK 1. $4 + 3i$ sayısının gösterdiği vektörün modül ve argümanını bulunuz.

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad , \quad \varphi \cong +37^0$$

18.1 - 5. Simetrik vektörler

$\overrightarrow{OM_1}$ vektörünün kompleks ifadesi $a + bi$ olsun.

$$\overline{OM_1} = a + bi \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{b}{a}$$

Şimdi bu vektörün eksenlere göre simetrikleri olan vektörlerin kompleks ifadelerini bulalım. Şekil 172.

$$\overline{OM_2} = -a + bi$$

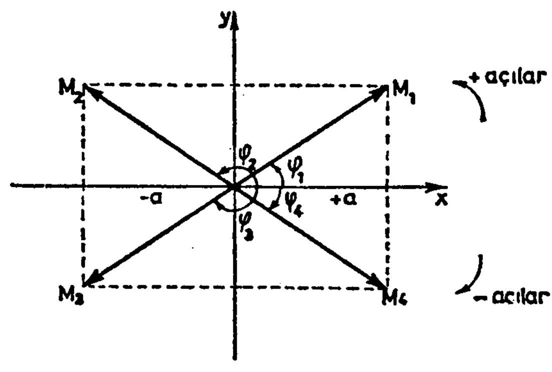
$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{b}{-a}$$

$$\overline{OM_3} = -a - bi$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{-b}{-a}$$

$$\overline{OM_4} = a - bi$$

$$\operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{-b}{a}$$



Şekil 172

olarak dört vektörün uzunluğunun da $\sqrt{a^2 + b^2}$ olduğu görülür. a ve b nin işaretleri vektörün hangi bölgede olacağını belirtir. Gerçekten

$a + bi$	birinci	bölgede olup φ	pozitif dar açı
$-a + bi$	ikinci	bölgede olup φ	pozitif geniş açı
$-a - bi$	üçüncü	bölgede olup φ	negatif geniş açı
$a - bi$	dördüncü	bölgede olup φ	negatif dar açı

dır.

İHTAR 1. Her reel terim yatay bir vektörü ve i ile çarpılmış her terim de düşey bir vektörü gösterir.

İHTAR 2. $a + b\,i$ ve $a - b\,i$ kompleks sayılarına *eşlenik kompleks sayılar* denir.

18.1 - 6. i İmajiner birimi üzerine birkaç hesap.

i sayısını cebirsel bir sayı gibi düşünerek aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \, . \, i = -1 \, . \, i = -i$$

$$i^4 = i^2 \, . \, i^2 = (-1) \, . \, (-1) = +1$$

$$i^5 = i^4 \, . \, i = 1 \, . \, i = i$$

$$i^{4n+m} = (i^4)^n \cdot i^m = 1^n \cdot i^m = i^m$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$\frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^2 \cdot i} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = i$$

Özet olarak

$$\boxed{i^2 = -1} \quad ; \quad \boxed{\frac{1}{i} = -i}$$

dir.

18.1 - 7. Bir vektörü ± 90° döndürmek.

KURAL. Bir vektörü $\pm 90^0$ *döndürmek için, bu vektörün* $a + b\,i$ *kompleks ifadesini* $+i$ *veya* $-i$ *ile çarpmak yeterlidir.*

Gerçekten Şekil 173 de gösterilen $\overrightarrow{OM}$ vektörünü 90^0 döndürmek için bu vektörün $a + b\,i$ kompleks ifadesini i ile çarparsak

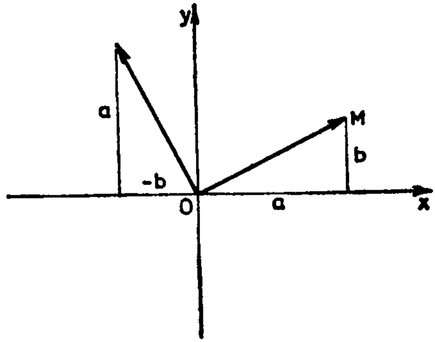
$$(a + b\,i)\; i = a\,i + b\,i^2 = -\,b + a\,i$$

elde edilir.

Şekil 173 den görüldüğü gibi elde edilen sonuç, $\overrightarrow{OM}$ e dik olan $\overrightarrow{OM'}$ vektörünün kompleks ifadesi

$$\overline{OM'} = -\,b + a\,i$$

dir.



Şekil 173

ÖRNEK. $4 + 3i$ vektörü $+90^0$ döndürülürse

$$(4 + 3i)\; i = -\,3 + 4i$$

vektörü elde edilir.

18.1 - 8. Bir vektörün kompleks ifadesinin ikinci şekli (trigonometrik veya kutupsal şekil)

Şekil 171 de gösterilen $\overrightarrow{OM}$ vektörünün kompleks ifadesinin kartezyen şekli olarak

$$\overline{OM} = a + b\,i$$

ifadesini bulmuştuk. Aynı şekilden

$$a = r\cos\varphi \quad , \quad b = r\sin\varphi$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$a + b\,i = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\overline{OM} = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

elde edilir. Bu son ifade kompleks sayıların *trigonometrik* veya *kutupsal* şekildeki ifadesidir.

Bu ikinci şekil ifadede sayının modül ve argümanı açık olarak verilmiş olmaktadır. Bu şekilden kartezyen şekle geçmek için $\cos\varphi$ ve $\sin\varphi$ ifadesinin sayısal değerlerini yerlerine koymak yeterli olur.

ÖRNEK. $4 + 3i = 5(\cos 37° + i \sin 37°)$ dir.

18.1 - 9. Bir vektörü herhangibir α açısı kadar döndürmek.

KURAL. Bir vektörü $\pm\alpha$ *açısı kadar döndürmek için, bu vektörün kompleks ifadesini* $(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)$ *ile çarpmak yeterlidir.*

$r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ vektörünü $\pm\alpha$ açısı kadar döndürdüğümüz takdirde bu vektörün r modülü değişmeyecek, argümanı ise $\varphi \pm \alpha$ olacaktır. O halde döndürme suretile elde edilecek vektörün kompleks ifadesi

$$r\,[\cos(\varphi \pm \alpha) + i\,\sin(\varphi \pm \alpha)]$$

olacaktır.

Kuralın da aynı sonucu vereceğini göstermek kolaydır. $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ vektörünü α açısı kadar döndürmek isteyelim. Kurala göre, elde edilecek vektörün kompleks ifadesi

$$r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) =$$
$$= r(\cos\varphi\,\cos\alpha + i\,\sin\varphi\,\cos\alpha + i\,\sin\alpha\,\cos\varphi + i^2\,\sin\varphi\,\sin\alpha)$$
$$= r[(\cos\varphi\,\cos\alpha - \sin\varphi\,\sin\alpha) + i\,(\sin\varphi\,\cos\alpha + \sin\alpha\,\cos\varphi)]$$
$$= r[\cos(\varphi + \alpha) + i\,\sin(\varphi + \alpha)]$$

olarak yukarıda elde edilen ifadenin aynıdır.

ÖRNEK. $5(\cos 37^0 + i \sin 37^0)$ vektörünü $+10^0$ döndürünüz.

Elde edilecek vektör

$$5(\cos 37° + i\,\sin 37°)(\cos 10° + i\,\sin 10°) = 5(\cos 47° + i\,\sin 47°)$$

olacaktır.

İHTAR. Daha evvel verilen 90^0 döndürmeye ait kural, bu kuralın, $\alpha = 90^0$ olması şeklindeki özel halidir. Zira

$$\cos\alpha + i \sin\alpha = \cos 90^0 + i \sin 90^0 = i$$

dir.

18.1 - 10. Bir vektörün kompleks ifadesinin üçüncü şekli (üstel şekil).

e^{ix} fonksiyonunu Maclaurin serisine açmak üzere e^x in serisinde x yerine ix koyarsak

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} + i^2\frac{x^2}{2!} + i^3\frac{x^3}{3!} + i^4\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots)$$

elde edilir. İkinci taraftaki parantezlerden birincisinin $\cos x$ in ve ikincisinin de $\sin x$ in serileri olduğu göz önüne alınırsa :

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

ve bu ifadede i yerine $-i$ konursa

$$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \sin x}$$

elde edilir. Bunlardan da

$$\boxed{r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r e^{i\varphi}}$$

yazılabilir ki bu suretle de bir vektörün kompleks ifadesinin üstel şekli olan $r e^{i\varphi}$ ifadesi bulunur.

ÖRNEK 1. Modülü 5, argümanı 37^0 olan $4 + 3i$ kompleks sayısını üç şekilde ifade ediniz.

$$4 + 3i = 5(\cos 37^0 + i \sin 37^0) = 5\, e^{37^0 i}$$

Genel olarak $r\, e^{i\varphi}$ ifadesinde φ yi, radyan cinsinden yazmak gerekirse de pratik olarak derece cinsinden yazılabilir.

ÖRNEK 2. $4 + 3i$ sayısının eşleniğini üç şekilde ifade ediniz.

$$4 - 3i = 5(\cos 37^0 - i \sin 37^0) = 5\, e^{-37^0 i}$$

dir.

İHTAR. Üstel şekildeki yazılışı kısaltmak üzere

$$5\, e^{\angle 37} \quad , \quad 5 \angle 37$$

sembolleri de kullanılabilmektedir.

18.2 Kompleks sayılarla hesap.

18.2 - 1. İki kompleks sayının eşitliği.

$a + b\,i$ ve $c + d\,i$ kompleks sayılarının eşit olabilmesi için

$$a = c \quad ; \quad b = d$$

olması gerekir. Bu takdirde

$$r_1 = r_2 \quad ; \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

eşitlikleri de mevcut olur.

ÖRNEK. $3 + 4i = a + b\,i$ olabilmesi için

$$a = 3 \quad , \quad b = 4$$

olmalıdır.

$3 = 4i$ eşitliği imkânsızdır. Çünkü reel bir sayı imajiner bir sayıya eşit olamaz.

$a + bi = 0$ ise

$$a = 0 \quad , \quad b = 0$$

dır.

$a + bi = di$ olabilmesi için

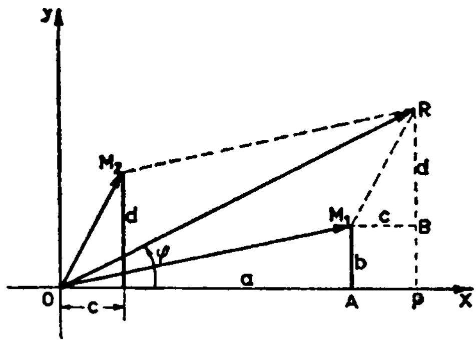
$$a = 0 \quad , \quad b = d$$

olmalıdır.

18.2 - 2. İki kompleks sayının toplamı.

Kompleks ifadeleri $a + bi$ ve $c + di$ olan $\overrightarrow{OM_1}$ ve $\overrightarrow{OM_2}$ vektörlerini göz önüne alalım. Şekil 174.

Bu iki vektörü geometrik olarak toplamak için M_1 den OM_2 ye paralel ve eşit M_1R doğrusunu çizelim. Toplam vektör, $\overrightarrow{OM_1}$ ve $\overrightarrow{OM_2}$ vektörleri üzerine kurulmuş paralel kenarın köşegeni olan $\overrightarrow{OR}$ vektörüdür. Bu bir geometrik toplamdır. R in ox üzerindeki izdüşümü P olsun. Bu takdirde $\overline{AP} = c$ ve $\overline{BR} = d$ olarak toplam vektörün bileşenleri



Şekil 174

$$\overline{OP} = a + c \quad \text{ve} \quad \overline{RP} = b + d$$

olur. Bunlar da verilen vektörlerin, reel kısımlarının toplamı ile imajiner kısımlarındaki i nin katsayılarının toplamıdır. O halde toplam vektörün kompleks ifadesi

$$(a + c) + (b + d)i$$

dir. Bu da bize *iki kompleks sayının toplamının, reel kısmı toplanan sayıların reel kısımları toplamına eşit ve imajiner kısmı da toplanan sayıların imajiner kısımlarının toplamına eşit bir kompleks sayı* olduğunu gösterir. Yani

$$\boxed{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i}$$

dir.

Toplam vektörün modül ve argümanı

$$r=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\quad,\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b+d}{a+c}$$

dır.

Benzer şekilde iki kompleks sayının farkı olan kompleks sayı da tanımlanabilir. Gerçekten

$$\boxed{(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

İHTAR. *Eşlenik iki kompleks sayının toplamı reel bir sayıdır.*

$$\boxed{(a+bi)+(a-bi)=2a}$$

ÖRNEK 1. $3+4i$ ve $1+i$ sayılarını toplayınız.

Bu sayıların modül ve argümanları

$$r_1=\sqrt{3^2+4^2}=5 \quad \text{ve} \quad r_2=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{4}{3}\quad,\quad \operatorname{tg}\varphi_2=\frac{1}{1}=1$$

$$\varphi_1\cong 53^0\quad,\quad \varphi_2=45^0$$

dır. Bu sayıların toplamı ise

$$(3 + 4i) + (1 + i) = (3 + 1) + (4 + 1)\, i = 4 + 5i$$

olup modül ve argümanı

$$r = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \cong 6,6$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{4} \quad \text{ve} \quad \varphi \cong 51^0$$

dir. Toplam sayının modül ve argümanı ile toplanan sayıların modül ve argümanları arasında basit bir bağıntının bulunmadığı sonuçların karşılaştırılmasından kolayca görülebilir.

18.2 - 3. İki kompleks sayının çarpımı.

İki kompleks sayının çarpımı, modülü bu sayıların modülleri çarpımına ve argümanı da bu sayıların argümanları toplamına eşit bir kompleks sayıdır.

Gerçekten

$$\begin{aligned}(a + b\,i)(c + d\,i) &= ac + bc\,i + ad\,i + bd\,i^2 \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)\,i \\ &= m + n\,i\end{aligned}$$

ve $r_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $r_2 = \sqrt{c^2 + d^2}$ olup

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} \\ &= \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2acbd + b^2 c^2 + a^2 d^2 + 2bcad} \\ &= \sqrt{a^2 (c^2 + d^2) + b^2 (c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{c^2 + d^2} = r_1 r_2\end{aligned}$$

olarak çarpım olan sayının modülünün, çarpılan sayıların modülleri çarpımına eşit olduğu gösterilmiş olur.

Çarpım olan sayının argümanı ise

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n}{m} = \frac{bc + ad}{ac - bd} = \frac{\dfrac{b}{a} + \dfrac{d}{c}}{1 - \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{d}{c}}$$

ve $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{d}{c}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \operatorname{tg} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

ve buradan da

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

olduğu görülerek yukarıda söylenen kuralın doğruluğu gösterilmiş olur.

ÖRNEK 1. $(3 + 4i)(1 + i)$ çarpımını yazınız.

$$(3 + 4i)(1 + i) = 3 + 4i + 3i + 4i^2 = -1 + 7i$$

olup modül ve argümanı

$$r = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} \cong 7{,}1$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{7}{-1} = -7 \quad , \quad \varphi \cong 98^0$$

dir. Verilen sayıların modül ve argümanları ise

$$r_1 = 5 \quad , \quad r_2 = \sqrt{2} \; , \quad \varphi_1 = 53^0 \quad , \quad \varphi_2 = 45^0$$

olarak

$$r_1 r_2 = 5\sqrt{2} = \sqrt{50} = r$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 53^0 + 45^0 = 98^0 = \varphi$$

dir.

İHTAR. Eşlenik iki kompleks sayının çarpımı reel bir sayıdır.

$$\boxed{(a + b\,i)(a - b\,i) = a^2 + b^2}$$

Trigonometrik şekil halinde çarpma.

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2]$$

$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2]$$

olup çarpımın sonucu, modülü $r_1 r_2$ ve argümanı $\varphi_1 + \varphi_2$ olan bir kompleks sayıdır.

Üstel şekil halinde çarpma.

$$r_1\, e^{i\varphi_1}\cdot r_2\, e^{i\varphi_2} = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

olarak elde edilen sonucun, modülü $r_1 r_2$ ve argümanı $\varphi_1 + \varphi_2$ olan bir kompleks sayı olduğu kolayca görülür.

ÖRNEK 2.

$$5(\cos 53^0 + i\sin 53^0)\cdot\sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0) =$$

$$= 5\sqrt{2}[\cos(53 + 45) + i\sin(53 + 45)]$$

$$= \sqrt{50}(\cos 98^0 + i\sin 98^0)$$

ÖRNEK 3.

$$5\, e^{53^0 i}\cdot\sqrt{2}\, e^{45^0 i} = 5\sqrt{2}\, e^{98^0 i} = 5\sqrt{2}\angle 98^0$$

Geometrik şekilde çarpma.

$a + bi$ ve $c + di$ kompleks sayılarının çarpımını temsil eden vektörü, çarpılan sayıları temsil eden vektörler yardımiyle elde edebiliriz.

$a + bi$ kompleks sayısı $\overrightarrow{OM_1}$ vektörü

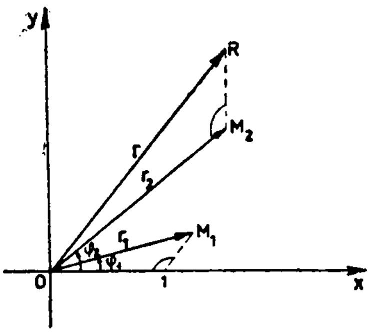
$c + di$ kompleks sayısı $\overrightarrow{OM_2}$ vektörü

ile verilmiş ve

$\overrightarrow{OM_1}$ in modülü r_1 , argümanı φ_1 ;

$\overrightarrow{OM_2}$ nin modülü r_2 argümanı φ_2 ;

olsun. Şekil 175.



Şekil 175

Bu iki sayının çarpımının argümanı

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

olacağından çarpımı temsil eden vektör ox ekseni ile φ açısını yapan OR doğrultusundadır. O halde problem, bu doğrultu üzerinde $r = r_1 r_2$ uzunluğunu tesbit etmektir. Bunun için de ox ekseni üzerindeki 1 apsisli noktayı M_1 ile birleştirelim. Meydana gelen $O1M_1$ açısını OM_2 üzerine taşıyalım. Yani $\widehat{O1M_1} = \widehat{OM_2R}$ olsun. Bu takdirde M_2R doğrusunun φ doğrultusundaki doğruyu kestiği nokta aranan R noktasıdır. Yani $\overline{OR} = r = r_1 r_2$ dir. Gerçekten $\overset{\Delta}{O1M_1}$ üçgeni ile $\overset{\Delta}{OM_2R}$ üçgeni benzer üçgenler olup

$$\frac{1}{r_1} = \frac{r_2}{\overline{OR}}$$

yazılarak $\overline{OR} = r_1 r_2 = r$ olduğu görülür.

18.2 - 4. Moivre formülü.

Çok faydalı olan bu formül, iki kompleks sayının çarpımı kuralından kolayca çıkarılabilir. Trigonometrik şekildeki çarpımı düşünerek

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= \cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)$$

$$= \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

yazılabilir. Aynı şekilde

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= \cos(2\varphi+\varphi) + i\sin(2\varphi+\varphi)$$

$$= \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$$

bulunur. Böylece devam edilirse

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi}$$

elde edilir ki bu ifadeye *Moivre Formülü* denir.

ÖRNEK 1. $\cos 3\alpha$ ve $\sin 3\alpha$ yı hesaplayınız.

$$\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$$

$$= \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha \cdot i\sin\alpha + 3\cos\alpha \cdot i^2\sin^2\alpha + i^3\sin^3\alpha$$

$$= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)$$

olarak her iki tarafın reel ve imajiner kısımları eşitlenirse

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$$

ve bunlardan da

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)$$

$$\sin 3\alpha = 3(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha$$

ve nihayet

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad ; \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

bulunur.

Bu örneğe benzer şekilde

$$\cos m\alpha + i\sin m\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^m$$

den faydalanarak $\cos m\alpha$, $\sin m\alpha$ da hesaplanabilir.

Moivre formülünü, n pozitif ve tam bir sayı olarak çıkardık. Halbuki bu formül, n in pozitif negatif tam ve kesirli bir sayı olması hallerinde de doğrudur. Şimdi sıra ile bunları da göstermeğe çalışalım.

n in negatif tam bir sayı olması hali.

n in negatif olması halinde formül doğru ise

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)$$

$$= \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$

olacaktır. Gerçekten $n > 0$ ise $-n$ negatif olarak

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}$$

$$= \frac{\cos n\varphi - i\sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$

dir. O halde formül n negatif ise de doğrudur.

Şimdi de n in kesirli bir sayı olması halinde formülün doğru olduğunu yani

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}\varphi + i\sin\frac{p}{q}\varphi$$

olduğunu gösterelim.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

olsun. Her iki tarafın q yüncü kuvvetini alırsak

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^p = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^q$$

elde edilir. p ve q tam sayılar olarak Moivre formülü uygulanırsa

$$\cos p\varphi + i \sin p\varphi = \cos q\alpha + i \sin q\alpha$$

olur. Bu eşitliğin doğru olabilmesi için

$$p\varphi = q\alpha \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{p}{q}\varphi$$

olacağından

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos \frac{p}{q}\varphi + i \sin \frac{p}{q}\varphi$$

olduğu gösterilmiş olur.

ÖRNEK 2. $(3-7i)^{-3}$ ifadesini $a+bi$ şeklinde yazınız.

$$3 - 7i = \sqrt{58}\,(\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad , \quad \varphi \cong 293^0$$

olup

$$\begin{aligned}
(3-7i)^{-3} &= 58^{-(3/2)}\,(\cos 293^0 + i \sin 293^0)^{-3} \\
&= 58^{-(3/2)}\,[\cos(-879^0) + i \sin(-879^0)] \\
&= 0{,}0022\,(\cos 200^0 + i \sin 200^0) \\
&= 0{,}0022\,(-\cos 20^0 - i \sin 20^0) \\
&= 0{,}0022\,(-0{,}937 - i\,0{,}348) \\
&= -10^{-4}\,(21 + 7{,}9\,i)
\end{aligned}$$

dir.

18.2 - 5. İki kompleks sayının bölümü.

İki kompleks sayının bölümü, modülü bu sayıların modülleri bölümüne ve argümanı da bu sayıların argümanları farkına eşit bir kompleks sayıdır.

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}$$

bölümünü elde etmek üzere pay ve paydayı, paydanın eşleniği olan $c-d\,i$ ile çarpalım. Bu takdirde

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}=\frac{(a+b\,i)(c-d\,i)}{(c+d\,i)(c-d\,i)}=\frac{ac+bc\,i-ad\,i-bd\,i^2}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i=m+n\,i$$

elde edilir. Bu sayının modülü

$$r=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+2acbd+b^2c^2+a^2d^2-2bcad}{(c^2+d^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{r_1}{r_2}$$

dır ki bu da kuralın verdiği sonuçtur.

Şimdi de bölüm olan sayının argümanını bulalım.

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{n}{m}=\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}}{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}}=\frac{bc-ad}{ac+bd}$$

olup pay ve paydayı ac ile bölersek

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}}{1+\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{d}{c}}=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-\operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}=\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi_2)$$

ve buradan da

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

olduğu görülerek yukarıda söylenen kuralın doğruluğu gösterilmiş olur.

ÖRNEK 1. $\dfrac{3+4i}{1+i}$ yi hesaplayınız.

$$r_1 = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4}{3} \quad , \quad \varphi_1 \cong 53^0$$

$$r_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \varphi_2 = 45^0$$

olarak

$$r = \frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = 3{,}53 \quad ; \quad \varphi = 53^0 - 45^0 = 8^0$$

dir. Buna göre bölüm

$$3{,}53\,(\cos 8^0 + i \sin 8^0)$$

dir. Bölümü kartezyen şekilde hesaplamak istersek :

$$\frac{3+4i}{1+i} = \frac{(3+4i)(1-i)}{1+1} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\,i$$

olup

$$r = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 3{,}53 \quad ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0{,}5}{3{,}5} \quad \text{ve} \quad \varphi = 8^0$$

dir.

ÖRNEK 2. $\dfrac{i R L \omega}{R + i L \omega}$ sayısının modül ve argümanını bulunuz.

İfade iki kompleks sayının bölümü şeklinde olup modülü bu sayıların modülleri bölümüne eşit olacağından

$$r = \frac{r_1}{r_2} = \frac{R L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

dır. Payın argümanı $\varphi_1 = 90^0$ ve paydanınki

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{L\omega}{R} \quad , \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}$$

olup

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 90^0 - \varphi_2$$

dir. Buna göre

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (90^0 - \varphi_2) = \operatorname{cotg} \varphi_2 = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{R}{L\omega}$$

dır.

Trigonometrik şekil halinde bölme.

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)}$$

bölümü de yukarıdaki kurala göre

$$\frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

dir. Gerçekten yukarıdaki ifadenin pay ve paydasını, paydanın eşleniği ile çarparsak

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\cos^2 \varphi_2 - i^2 \sin^2 \varphi_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + (i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

elde edilir.

Üstel şekil halinde bölme.

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

olarak elde edilen sonucun modülü $\frac{r_1}{r_2}$ ve argümanı $\varphi_1 - \varphi_2$ olan bir kompleks sayı olduğu görülür.

ÖRNEK 3. $\frac{5 e^{53 i}}{\sqrt{2}\, e^{45 i}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} e^{8i}$

Geometrik şekilde bölme.

$\frac{a+bi}{c+di}$ bölümünü temsil eden vektörü, pay ve paydadaki sayıları temsil eden vektörler yardımiyle elde edebiliriz.

$a + b i$ kompleks sayısı $\overrightarrow{OM_1}$ vektörü ,

$c + d i$ kompleks sayısı $\overrightarrow{OM_2}$ vektörü

ile verilmiş ve

$\overrightarrow{OM_1}$ in modülü r_1 , argümanı φ_1 ,

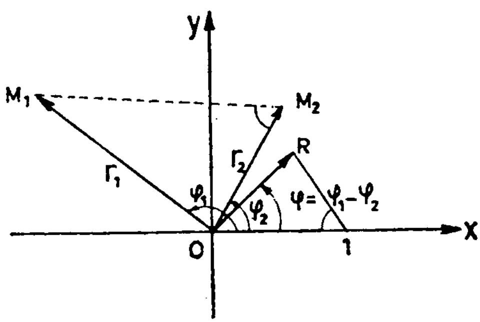
$\overrightarrow{OM_2}$ nin modülü r_2 , argümanı φ_2

olsun. Şekil 176.

Bu iki sayının bölümünün argümanı

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

olacağından bölümü temsil eden vektör ox ekseni ile φ açısını yapan bir doğrultuda olacaktır. O halde problem, bu doğrultu üzerinde $r = \frac{r_1}{r_2}$ uzunluğunu tesbit etmektir. Bunun için de M_1,



Şekil 176

M_2 noktalarını birleştirelim. Birleştirme çizgisinin, bölen vektörün $\overline{OM_2}$ doğrultusu ile teşkil ettiği açıyı, bir kenarı ox ekseni olmak üzere ox ekseni üzerindeki 1 apsisli noktadan itibaren çizelim. Açının çizilen ikinci kenarının φ doğrultusunu kestiği R noktası aranan uzaklığı verir. Yani

$$\overline{OR} = \frac{r_1}{r_2} = r$$

dir. Gerçekten bu çizime göre $\overset{\Delta}{O1R}$ üçgeni ile $\overset{\Delta}{OM_2M_1}$ üçgeni benzer olduklarından

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{OR}{1}$$

olduğu görülür.

18.2 - 6. Bir kompleks sayının tersi.

Bir kompleks sayının tersi, modülü bu sayının modülünün tersine ve argümanı bu sayının argümanının aksi işaretlisine eşit bir kompleks sayıdır.

Gerçekten

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i = m + n\, i$$

olarak

$$r = \sqrt{m^2+n^2} = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{r_1}$$

ve

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-n}{m} = \frac{\dfrac{-b}{a^2+b^2}}{\dfrac{a}{a^2+b^2}} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(-\varphi_1)$$

olarak $\varphi = -\varphi_1$ dir.

ÖRNEK $\dfrac{1}{3+4i}$ sayısı?

$$r_1 = 5 \quad \text{ve} \quad \varphi_1 = 53^0 \quad \text{olarak} \quad r = \frac{1}{5} \ , \quad \varphi = -53^0$$

olan bir sayıdır.

18.2 - 7. Bir kompleks sayının kuvveti.

Bir kompleks sayının herhangi n. kuvveti, modülü bu sayının modülünün n. kuvvetine ve argümanı bu sayının argümanının n katına eşit bir kompleks sayıdır.

$$(a+bi)^n = \overbrace{(a+bi)(a+bi)\cdots(a+bi)}^{n \text{ defa}}$$

çarpımına eşit ve $a+bi$ için

$$r_1 = \sqrt{a^2+b^2} \ , \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{b}{a}$$

olup $(a+bi)^n$ için :

$$r = r_1 \cdot r_1 \cdots r_1 = r_1^n = (a^2+b^2)^{n/2}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_1 = n\varphi_1$$

dir.

Bu sonuçlar trigonometrik ve üstel şekillerde daha kolayca görülebilir.

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

olarak sonuç r^n modüllü ve $n\varphi$ argümanlı bir kompleks sayıdır.

Aynı şekilde

$$(r\,e^{i\varphi})^n = r^n\,e^{in\varphi}$$

olarak aynı sonuç kolayca görülebilir.

ÖRNEK. $(2\,e^{4i})^3 = 8\,e^{12i} = 8\angle 12$

18.2 - 8. a + b i sayısının kare kökü.

Bir kompleks sayının kare kökü, modülü bu sayının modülünün kare köküne ve argümanı da bu sayının argümanının yarısına eşit bir kompleks sayıdır.

Görülüyor ki bir sayının kuvveti kuralında $n = \frac{1}{2}$ alınırsa kare kök kuralı elde edilir.

ÖRNEK 1. $3 + 4i$ sayısının kare kökünü hesaplayınız.

$$\sqrt{3 + 4i} = m + n\,i$$

olacak şekilde m ve n yi hesaplıyalım. Bunun için de her iki tarafın karesini alalım.

$$3 + 4i = m^2 + n^2 i^2 + 2i\,m\,n = m^2 - n^2 + 2i\,m\,n$$

Her iki tarafın reel ve imajiner kısımları eşitlenirse

$$3 = m^2 - n^2 \quad , \quad 4 = 2\,m\,n$$

ve ikincisinden

$$m = \frac{2}{n}$$

elde edilip birincide yerine konursa

$$3 = \frac{4}{n^2} - n^2$$

$$n^4 + 3n^2 - 4 = 0$$

olup

$$n^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = +1 \quad \text{ve} \quad -4$$

elde edilir. Yalnız $+1$ cevap olabileceğinden

$$n = \pm 1 \quad \text{ve} \quad m = \pm 2$$

elde edilir. Bunlara göre kare kök olarak modülleri eşit

$$m + n\,i \quad \text{ve} \quad -m - n\,i$$

cevapları elde edilir.

Görülüyor ki, bir kompleks sayı biri diğerinin simetriği olan iki kare köke maliktir. Özel olarak -1 in kare kökü $\pm i$ dir.

İHTAR. $\sqrt{-a \pm b\,i}$ verilmiş ise

$$\sqrt{-(a \pm b\,i)} = i\sqrt{a \pm b\,i}$$

yazılarak evvelâ $\sqrt{a \pm b\,i}$ hesaplanır ve i ile çarpılır.

ÖRNEK 2. $\sqrt{-21 + 16\,i} = i\sqrt{21 - 16\,i} = i\,(4{,}8 - 1{,}6\,i)$

$$= 1{,}6 + 4{,}8\,i$$

18.2 - 9. Kompleks sayıların üstel ifadeleri üzerine muhtelif ihtarlar.

1. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ olup $\varphi = 2\pi$ yapılırsa

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 + i \,.\, 0 = 1$$

$$\boxed{e^{2\pi i} = 1}$$

elde edilir. Bu sonuçtan faydalanarak

$$e^{x} = e^{x} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^{x} \cdot e^{2\pi i} = e^{x+2\pi i}$$

$$\boxed{e^{x} = e^{x+2\pi i}}$$

bulunur. Bu fonksiyonu, y kompleks olarak e^{y} şeklinde düşünürsek, fonksiyonun $2\pi i$ peryoduna haiz bir peryodik fonksiyon olduğu görülür.

2. $e^{\alpha + i\gamma} = e^{\alpha} \cdot e^{i\gamma} = e^{\alpha} (\cos \gamma + i \sin \gamma)$

yazılabileceği kolayca görülmektedir.

$$\boxed{e^{\alpha + i\gamma} = e^{\alpha} (\cos \gamma + i \sin \gamma)}$$

3. $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$

den

$$\boxed{e^{\pi i} = -1}$$

olduğu kolayca görülmektedir.

18.2 - 10. Bir kompleks sayının n. mertebeden kökü.

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Moivre formülünden faydalanarak kompleks sayıların herhangi n. mertebeden köklerini hesaplamak mümkündür.

Evvelâ $n = 2$ halini inceliyelim.

$$X^{2} = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

olsun. İkinci taraftaki sayının kare kökünü

$$X = \rho\ (\cos\ \omega + i\ \sin\ \omega)$$

kabul ederek ρ ve ω yı hesaplıyalım. Son ifadenin her iki tarafının karesini alırsak

$$X^2 = \rho^2\ (\cos\ \omega + i\ \sin\ \omega)^2 = \rho^2\ (\cos\ 2\ \omega + i\ \sin\ 2\omega)$$

$$r\ (\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi) = \rho^2\ (\cos\ 2\omega + i\ \sin\ 2\omega)$$

elde edilir. Bu ifadeden

$$\rho^2 = r$$

$$\cos\ \varphi = \cos\ 2\omega \qquad 2\omega = \pm\ \varphi + 2k\pi$$

$$2\omega = \varphi + 2k\pi$$

$$\sin\ \varphi = \sin\ 2\omega$$

$$2\omega = (2k + 1)\pi - \varphi$$

eşitlikleri yazılabilir ki bunlardan ortak çözüm olarak

$$\rho^2 = r \quad ; \quad 2\omega = \varphi + 2k\pi$$

$$\rho = \sqrt{r} \qquad \omega = \frac{\varphi}{2} + k\pi$$

elde edilir. Buradan görülüyor ki ρ için bir tek çözüm, ω için sonsuz sayıda çözüm vardır. Ancak kare kök için k nın çift ve tek değerlerine karşılık olarak

$$X = \sqrt{r}\,(\cos\ \frac{\varphi}{2} + i\ \sin\ \frac{\varphi}{2})$$

$$X = \sqrt{r}\left[\cos\ (\frac{\varphi}{2} + \pi) + i\ \sin\ (\frac{\varphi}{2} + \pi)\right] = -\sqrt{r}\,(\cos\ \frac{\varphi}{2} + i\ \sin\frac{\varphi}{2})$$

şeklinde iki çözüm mevcuttur. Bu iki değerin eşit fakat zıt işarette olduklarını kolayca görmekteyiz.

a reel ve negatif bir sayı olsun. Bu sayı argümanı π olan yatay bir vektörü gösterir. Bu sayının kare kökünü arayalım. Yukarıda görüldüğü gibi

$$X = \sqrt{-a}\,(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

dir. O halde kökler

$$X = i\sqrt{-a} \quad \text{ve} \quad X = -\,i\sqrt{-a}$$

dır.

ÖRNEK 1. $\sqrt{i}$ yi hesaplayınız.

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

olup

$$X = \sqrt{1}\,(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

dir. Buna göre

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \sqrt{i} = -\frac{1+i}{2}$$

dir.

n. MERTEBEDEN KÖK.

$A = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ sayısının n. mertebeden kökü olan X i hesaplıyalım. Buna göre

$$X^n = A \quad \text{veya} \quad X^n - A = 0$$

olup aranılan kökler $X^n - A = 0$ denkleminin kökleridir.

$$X = \rho\,(\cos\omega + i\sin\omega)$$

kabul ederek ρ ve ω yı hesaplıyalım. Bunun için de ifadenin her iki tarafının n. kuvvetini alalım. Buna göre

$$X^n = \rho^n\,(\cos\omega + i\,\sin\omega)^n = \rho^n\,(\cos n\omega + i\,\sin n\omega)$$

$$r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = \rho^n\,(\cos n\omega + i\,\sin n\omega)$$

olup bu ifadeden

$$r = \rho^n$$

$$\cos\varphi = \cos n\omega \qquad n\omega = \pm\,\varphi + 2k\pi$$

$$n\omega = \varphi + 2k\pi$$

$$\sin\varphi = \sin n\omega$$

$$n\omega = (2k+1)\,\pi - \varphi$$

eşitlikleri yazılabilir ki bunlardan ortak çözüm olarak

$$\rho^n = r \quad , \quad n\omega = \varphi + 2k\pi$$

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad , \quad \omega = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

elde edilir. Bunları yukarıda yerine koyarsak $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sayısının n. mertebeden kökü olarak

$$X = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

bulunur. Kök sayısı n dir. Bu bakımdan bütün kökleri bulmak için k ya $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ değerlerini vermek yeterli olacaktır.

ÖRNEK 2. $\sqrt[3]{1}$ i hesaplayınız.

$$X^3 = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

olup

$$X = 1\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

dir. k ya $0, 1, 2,$ değerleri verilirse

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$X_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

elde edilir. Bu köklerden X_3, X_2 kökünün karesine eşittir.

Gerçekten

$$X_2^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = X_3$$

dir.

$$X_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \alpha$$

olarak kabul edilirse $X_3 = \alpha^2$ olur. Böylece 1 sayının küp kökü $1, \alpha$ ve α^2 dir. Bu sayılar aynı zamanda $x^3 - 1 = 0$ denkleminin de kökleridir.

Aynı şekilde hareket edilerek

$\sqrt[4]{1}$ için $+1, -1, i, -i$

$\sqrt[6]{1}$ için $\alpha, \alpha^2, +1, -1, -\alpha, -\alpha^2$

sonuçları bulunur.

ÖRNEK 3. $32(\cos 50^0 + i\sin 50^0)$ sayısının 5. mertebeden kökünü hesaplayınız.

$$X = \sqrt[5]{32}\left[\cos\left(\frac{50^0}{5} + \frac{360^0 k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{50^0}{5} + \frac{360^0 k}{5}\right)\right]$$

$$X = 2[\cos(10^0 + 72^0 k) + i\sin(10^0 + 72^0 k)]$$

olarak k ya $0, 1, 2, 3, 4$ değerleri verilirse

$$X_1 = 2\ (\cos 10^0 + i \sin 10^0)$$

$$X_2 = 2\ (\cos 82^0 + i \sin 82^0)$$

$$X_3 = 2\ (\cos 154^0 + i \sin 154^0)$$

$$X_4 = 2\ (\cos 226^0 + i \sin 226^0)$$

$$X_5 = 2\ (\cos 298^0 + i \sin 298^0)$$

bulunur.

18.2 - 11. Euler formülleri.

18.1-10. da e^{ix} ve e^{-ix} ifadelerini seriye açmak suretiyle

$$\boxed{\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}}$$

bağıntılarını bulmuştuk. Bu bağıntılar *Euler formülleri* adını alır. Bu formülleri taraf tarafa toplamak ve taraf tarafa çıkarmak suretile

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2\,i \sin x$$

ve bunlardan da

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} \qquad \boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

formülleri elde edilir.

ÖRNEK.

$$S_1 = \cos a + \cos (a + h) + \cos (a + 2h) + \cdots + \cos [a + (n-1)h]$$

$$S_2 = \sin a + \sin (a + h) + \sin (a + 2h) + \cdots + \sin [a + (n-1)h]$$

toplamlarını hesaplayınız.

İkinci ifadenin her iki tarafını i ile çarpıp birinci ile toplarsak

$$S_1 + i S_2 = (\cos a + i \sin a) + [\cos (a+h) + i \sin (a+h)] + \ldots + \cos [a + (n-1)h] + i \sin [a + (n-1)h]$$

$$S_1 + i S_2 = e^{ia} + e^{i(a+h)} + e^{i(a+2h)} + \ldots + e^{i[a+(n-1)h]}$$

$$= e^{ia}(1 + e^{ih} + e^{i \cdot 2h} + \ldots + e^{i(n-1)h})$$

elde edilir. Parantez içindeki toplam ortak çarpanı e^{ih} olan bir geometrik serinin ilk n teriminin toplamı olup

$$S_1 + i S_2 = e^{ia} \frac{e^{inh} - 1}{e^{ih} - 1} = e^{ia} \frac{e^{i\frac{nh}{2}}\left(e^{i\frac{nh}{2}} - e^{-i\frac{nh}{2}}\right)}{e^{i\frac{h}{2}}\left(e^{i\frac{h}{2}} - e^{-i\frac{h}{2}}\right)}$$

$$= e^{i(a + \frac{n-1}{2}h)} \frac{e^{i\frac{nh}{2}} - e^{-i\frac{nh}{2}}}{e^{i\frac{h}{2}} - e^{-i\frac{h}{2}}} = e^{i(a + \frac{n-1}{2}h)} \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$$

$$= \left[\cos (a + \frac{n-1}{2}h) + i \sin (a + \frac{n-1}{2}h)\right] \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$$

ve her iki tarafın reel ve imajiner kısımları eşitlenerek

$$S_1 = \cos (a + \frac{n-1}{2}h) \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$$

$$S_2 = \sin (a + \frac{n-1}{2}h) \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$$

bulunur.

18.2 - 12. $\cos^m x$ ve $\sin^m x$ in hesabı.

$$\cos^m x = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right]^m = \frac{1}{2^m}(e^{ix} + e^{-ix})^m$$

yazılarak ikinci taraf binom açılımına tâbi tutulur terimler guruplandırılırsa basit bir ifadeye varılır.

ÖRNEK 1. $\cos^4 x$ in hesabı.

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}(e^{ix} + e^{-ix})^4$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4\, e^{3ix}\, e^{-ix} + 6\, e^{2ix} . e^{-2ix} + 4\, e^{ix} . e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4\, e^{2ix} + 6 + 4\, e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16}[(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4\,(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6]$$

olup Euler formüllerine göre birinci parantezin $2 \cos 4x$ ve ikinci parantezin $2 \cos 2x$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}(2 \cos 4x + 4 . 2 \cos 2x + 6)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

elde edilir.

ÖRNEK 2. $\sin^5 x$ in hesabı.

$$\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}(e^{ix} - e^{-ix})^5$$

$$= \frac{1}{32\,i^5}\,(e^{5ix} - 5\,e^{4ix}\,e^{-ix} + 10\,e^{3ix}\,e^{-2ix} - 10\,e^{2ix}\,e^{-3ix} + 5\,e^{ix}\,e^{-4ix} - e^{-5ix})$$

$$= \frac{1}{32\,i^5}\,(e^{5ix} - 5\,e^{3ix} + 10\,e^{ix} - 10\,e^{-ix} + 5\,e^{-3ix} - e^{-5ix})$$

$$= \frac{1}{32\,i^5}\,[\,(e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})\,]$$

olup, Euler formüllerine göre, birinci parantezin $2i \sin 5x$, ikinci parantezin $2i \sin 3x$ ve sonuncu parantezin $2i \sin x$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\sin^5 x = \frac{1}{32\,i^5}\,(2i \sin 5x - 10i \sin 3x + 20i \sin x)$$

$$= \frac{1}{32\,i^4}\,(2 \sin 5x - 10 \sin 3x + 20 \sin x)$$

$$= \frac{1}{16}\,(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$$

bulunur.

18.2 - 13. x kompleks bir sayı olduğuna göre sin x ve cos x in A + B i şeklinde yazılması.

Euler formüllerinde x yerine $i\,x$ koyarsak formüller

$$\cos i\,x = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} \quad ; \quad \sin i\,x = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i\,\frac{e^{-x} - e^{x}}{2\,i^2}$$

$$\boxed{\cos i\,x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}} \quad ; \quad \boxed{\sin i\,x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\,i}$$

şeklini alır.

Şimdi de $\sin x$ ve $\cos x$ i $A + B\,i$ şeklinde yazmağa çalışalım.

$$x = a + b\,i$$

olsun. O takdirde

$$\cos x = \cos(a + b\,i) = \cos a \cos b\,i - \sin a \sin b\,i$$

$$= \cos a \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} - \sin a \frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\, i$$

olur ki bu da

$$\cos x = A + B\,i$$

şeklindedir. Benzer şekilde $\sin x$ de bu şekle sokulabilir.

ÖRNEK 1. $\cos i$ yi hesaplayınız.

$$\cos\, i\,x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

olup $x = 1$ yapılırsa

$$\cos\, i = \frac{e + e^{-1}}{2} = \operatorname{ch} 1$$

elde edilir.

ÖRNEK 2. $\sin\,(1 + i)$ yi hesaplayınız.

$$\sin(1 + i) = \sin 1 \cos i + \sin i \cos 1$$

$$= \sin 1\, \frac{e + e^{-1}}{2} + \cos 1\, \frac{e - e^{-1}}{2}\, i$$

$$= \sin 1 \operatorname{ch} 1 + i \cos 1 \operatorname{sh} 1$$

ÖRNEK 3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i \log 2\right)$ yi hesaplayınız.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i \log 2\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cos(i \log 2) + \sin(i \log 2) \cos\frac{\pi}{2}$$

$$= \cos(i \log 2)$$

$$= \frac{e^{\log 2} + e^{-\log 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

18.2 - 14. Bir kompleks sayının logaritması.

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

kompleks sayısının logaritmasını hesaplamak isteyelim.

$$\log r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = a + b\,i \qquad (1)$$

kabul ederek a ve b yi hesaplıyalım Bunun için de (1) ifadesinden tekrar $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ sayısını bulalım. (1) den :

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{a+bi} = e^{a} (\cos b + i \sin b)$$

yazılabilir. Her iki tarafın reel ve imajiner kısımları eşitlenirse

$$r = e^{a} \quad \text{ve} \quad a = \log r$$

$$\cos \varphi = \cos b \quad , \quad b = \pm \varphi + 2k\pi$$

$$\sin \varphi = \sin b \quad , \quad \begin{array}{l} b = \varphi + 2k\pi \\ b = (2k+1)\pi - \varphi \end{array}$$

ve bunlardan ortak çözüm olarak

$$a = \log r \quad , \quad b = \varphi + 2k\pi$$

elde edilerek

$$\boxed{\log[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)] = \log r + (\varphi + 2k\pi)\,i}$$

bulunur.

ÖRNEK. i^{-2i} yi hesaplayınız.

$$\log a^{b} = b \log a \quad \text{ve} \quad a^{b} = e^{b \log a}$$

olup

$$i^{-2i} = e^{-2i \log i} = e^{-2i[\log 1 + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\,i]}$$

$$= e^{-2i[(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\,i]} = e^{\pi + 4k\pi}$$

dır.

18. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

1) $(3+5i)(4-i)=?$ Cevap. $17+17i$

2) $(5-8i)(2-5i)(2-3i)=?$ Cevap. $-183+8i$

3) $\dfrac{3-i}{4+5i}$ Cevap. $\dfrac{7}{41}-\dfrac{19}{41}i$

4) $\dfrac{50+9i}{5-8i}$ Cevap. $2+5i$

5) $\dfrac{18+13i}{(2+3i)(5-6i)}$ Cevap. $0{,}685+0{,}391\ i$

6) $z=(1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ sayısının reel olduğunu gösteriniz.

7) $z=\dfrac{1+k\,i}{2k+(k^2-1)\,i}$ sayısını $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $z=\dfrac{k+i}{k^2+1}$

8) a ve b reel sayılar olduğuna göre

$$(x+a\,i)(b+y\,i)=4+3i$$

olabilmesi için x ve y ne olmalıdır

Cevap. $bx^2-4x+a(ab-3)=0 \quad ; \quad y=\dfrac{bx-4}{a}$

9) $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ sayısının modül ve argümanını bulunuz

Cevap. $r=1 \quad , \quad \varphi=\dfrac{\pi}{6}+2\,k\pi$

10) $-7+5\,i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

11) $1-i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap. $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

12) $8+3i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap. $\sqrt{73}\,(\cos 20^0\, 30' + i \sin 20^0\, 30')$

13) $2+2i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap. $2\sqrt{2}\,(\cos 45^0 + i \sin 45^0)$

14) $-3+3i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap. $3\sqrt{2}\,(\cos 135^0 + i \sin 135^0)$

15) $-1-\sqrt{3}\,i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap. $2(\cos 240^0 + i \sin 240^0)$

16) $\sqrt{3}-i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap. $2(\cos 330^0 + i \sin 330^0)$

17) $2-2i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap. $2\sqrt{2}\,(\cos 315^0 + i \sin 315^0)$

18) $-1+\sqrt{3}\,i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap. $2(\cos 120^0 + i \sin 120^0)$

19) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$ sayısını trigonometrik şekilde yazınız.

20) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^4$ i hesaplayınız.

Cevap. -1

21) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$ ü trigonometrik şekilde yazınız.

Cevap $\cos\frac{3\pi}{4} - i \sin\frac{3\pi}{4}$

22) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2/3}$ ü hesaplayınız.

Cevap. $\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$

23) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ ifadesini hesaplayınız.

Cevap. 0

24) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{6}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{6}$ ifadesini hesaplayınız.

Cevap. $-2i$

25) $(1+\sqrt{3}\,i)^5+(1-\sqrt{3}\,i)^5$ ifadesini hesaplayınız.

Cevap. 32

26) $[4(\cos 20^0+i\sin 20^0)]\,[3(\cos 25^0+i\sin 25^0)]$ ifadesini hesaplayınız.

Cevap. $12(\cos 45^0+i\sin 45^0)$

27) $[3(\cos 80^0+i\sin 80^0)]\,[6(\cos 130^0+i\sin 130^0)]$ ifadesini hesaplayınız.

Cevap. $18(\cos 210^0+i\sin 210^0)$

28) $\dfrac{12(\cos 54^0+i\sin 54^0)}{3(\cos 24^0+i\sin 24^0)}=?$ **Cevap.** $2\sqrt{3}+2i$

29) $\dfrac{4\sqrt{2}(\cos 45^0+i\sin 45^0)}{2(\cos 315^0+i\sin 315^0)}=?$ **Cevap.** $2\sqrt{2}\,i$

30) $\dfrac{5(\cos 20^0+i\sin 20^0)}{3(\cos 40^0+i\sin 40^0)}=?$ **Cevap.** $\dfrac{15}{2}+\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\,i$

31) $\dfrac{[8(\cos 40^0+i\sin 40^0)]^3}{[2(\cos 60^0+i\sin 60^0)]^4}=?$ **Cevap.** $-16-16\sqrt{3}\,i$

32) $\left[\dfrac{5(\cos 15^0+i\sin 15^0)}{10(\cos 45^0+i\sin 45^0)}\right]^{12}=?$ **Cevap.** $\dfrac{1}{4096}$

33) $\left[\dfrac{4(\cos 30^0+i\sin 30^0)+4(\cos 60^0+i\sin 60^0)}{2(\cos 15^0+i\sin 15^0)}\right]^4$

Cevap. $(-56-32\sqrt{3})+(96+56\sqrt{3})\,i$

34) $\dfrac{(i-\sqrt{3})^3}{1-i}=?$ **Cevap.** $-4+4i$

35) $(1+i)^2+(1+i)^4=?$ Cevap. $-4+2i$

36) $\dfrac{1}{(1+i)^3}=?$ Cevap. $\dfrac{-(1+i)}{4}$

37) $(1-i)^8=?$ Cevap. 16

38) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10}=?$ Cevap. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

39) $\left(\dfrac{5+5\,i}{10\sqrt{3}+10\,i}\right)^{6}=?$ Cevap. $\dfrac{1}{512}\,i$

40) $\left(\dfrac{6\sqrt{3}+6\,i}{6+6\,i}\right)^{-3}=?$ Cevap. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\,i$

41) a ve b yi o suretle belirtiniz ki $x=1+i$ sayısı $x^7+ax^5+b=0$ denkleminin bir kökü olsun.

Cevap. $a=-2$; $b=-16$

42) a ve b yi o suretle belirtiniz ki $x=1+i$ sayısı $x^9+ax^7+b=0$ denkleminin bir kökü olsun.

Cevap. $a=2$; $b=-32$

43) $(2+i)\,e^{(1+3\,i)\,x}+(2-i)\,e^{(1-3\,i)\,x}$ ifadesinin bir reel sayı olduğunu gösteriniz.

44) $10\,e^{5^0 i}\,.\,20\,e^{-10^0 i}=?$ Cevap. $200\,e^{-5^0 i}$

45) $\dfrac{10\,e^{-5^0 i}\,.\,4\,e^{30^0 i}}{6\,e^{-50^0 i}\,.\,7\,e^{5^0 i}}=?$ Cevap. $\dfrac{20}{21}\,e^{70^0 i}$

46) $(2\,e^{-10^0 i})^3\,(4\,e^{-20^0 i})=?$ Cevap. $32\,e^{-50^0 i}$

47) $\dfrac{20\,e^{10^0 i}\sqrt{50\,e^{50^0 i}\,.\,2\,e^{-4^0 i}}}{5\,e^{-20^0 i}}=?$ Cevap. $40\,e^{53^0 i}$

48) $\dfrac{(2-10\,i)\,.\,5\,e^{20^0 i}}{1+4\,i}=?$ Cevap. $12{,}4\,e^{-134^0,\,50'\,i}$

49) $$\frac{\left(4\,e^{\frac{\pi}{6}i}\right)\left(2\,e^{-\frac{5\pi}{4}i}\right)\left(6\,e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)}{\left(4\,e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2}=?$$

Cevap. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$

50) $2+i=\sqrt{5}\,e^{i\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}}$ olduğunu gösteriniz.

51) $e^{1-\frac{\pi}{4}i}$ yi $c+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $\frac{e}{\sqrt{2}}(1-i)$

52) $e^{i\frac{\pi}{4}+\log 3}$ ifadesini $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i)$

53) $e^{\frac{3+4\pi i}{3}}$ ifadesini $a+b\,i$ şeklinde yazınız,

Cevap. $-e\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$.

54) $e^{-2\pi i}-e^{-4\pi i}+e^{-6\pi i}$ ifadesini $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. 1

55) $2\,e^{\frac{5\pi i}{6}}$ ifadesini $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap $-\sqrt{3}+i$

56) $\sqrt[6]{-1}=?$

57) $\sqrt[5]{-1-i}=?$

58) $\sqrt[5]{32}=?$

59) $\sqrt[4]{-16}=?$

60) $\sqrt{i}=?$

61) $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}=?$

62) $\sqrt[3]{-8\,i}=?$

63) $\sqrt[3]{2\,i-2}=?$

64) $\sqrt{2\sqrt{3}-2\,i}=?$

65) $\sqrt[5]{-4+4\,i}=?$

66) $\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}\,i}=?$

67) $\sqrt[5]{32(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)}=?$

68) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}=?$

69) $\sqrt[5]{16-16\sqrt{3}\,i}=?$

70) $\sqrt[4]{2+2\sqrt{3}\,i}=?$

71) $\sin i x$ i $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $i\,\mathrm{sh}\,x$

72) $\mathrm{sh}(x+i\,y)$ yi $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $\cos y\,\mathrm{sh}\,x + i\sin y\,\mathrm{ch}\,x$

73) $\mathrm{ch}(2-3\,i)$ yi $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $\mathrm{ch}\,2\cos 3 - i\,\mathrm{sh}\,2\sin 3$

74) $\mathrm{ch}\,i x$ i $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $\cos x$

75) $\mathrm{ch}\,2\pi i$ yi $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. 1

76) i^{3+i} yi $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $-i\,e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

77) $\log i$ yi $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $\left(\frac{1}{2}\pi+2k\pi\right)i$

78) $\cos \pi i$ yi $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $\mathrm{ch}\,\pi$

79) $(1+i)^i$ sayısının modülunu bulunuz

Cevap. $e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$

80) $(i-1)^{i+1}$ ifadesini $a+b\,i$ şeklinde yazınız.

Cevap. $\sqrt{2}\,e^{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\log\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\log\sqrt{2}\right)\right]$

19. BÖLÜM

UZAY ANALİTİK GEOMETRİ

19.1 Uzayda koordinatlar.

19.1 - 1. Kartezyen koordinatlar.

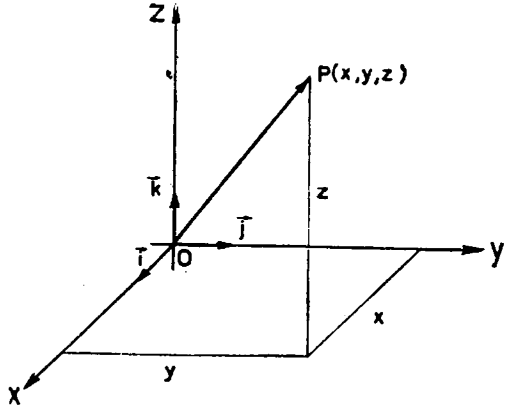
Uzayda bir noktanın yerini belirtmek üzere çeşitli koordinat sistemleri kullanılır. Biz bunlardan *kartezyen koordinatları, silindirik koordinatları* ve *küresel koordinatları* söyliyeceğiz.

Birbirine dik ox , oy , oz eksenlerini gözönüne alalım. Bu eksenler ikişer ikişer xoy , yoz ve zox düzlemlerini meydana getirirler. Bu düzlemler uzayı sekiz bölgeye ayırır. Uzaydaki bir P noktasının, *koordinat düzlemleri* adı verilen bu düzlemlere uzaklıklarına, bu noktanın *kartezyen koordinatları* denir. Bu uzaklıklar, düzlem analitik geometriye benzer olarak, x , y , z ile gösterilir. Burada x , yoz düzlemine olan uzaklığı; y , zox düzlemine olan uzaklığı ve z de xoy düzlemine olan uzaklığı gösterir.

$$x = \text{apsis} \quad , \quad y = \text{ordinat} \quad , \quad z = \text{kot}$$

adlarını alır.

P noktası yoz düzleminin ön tarafında veya arka tarafında ise x apsisi pozitif veya negatifdir. P noktası, zox düzleminin sağında veya solunda ise y ordinatı pozitif veya negatifdir. P noktası xoy düzleminin üst tarafında veya alt tarafında ise z kotu pozitif veya negatifdir. Bunlara göre uzaydaki bir P noktası kartezyen koordinatlar yardımiyle $P(x, y, z)$ şeklinde gösterilir. (Şekil 177).



Şekil 177

Uzaydaki bir P noktası vektörel olarak ta tanımlanabilir. ox, oy, oz eksenlerinin birim vektörleri $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ iseler $P(x, y, z)$ noktası için

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

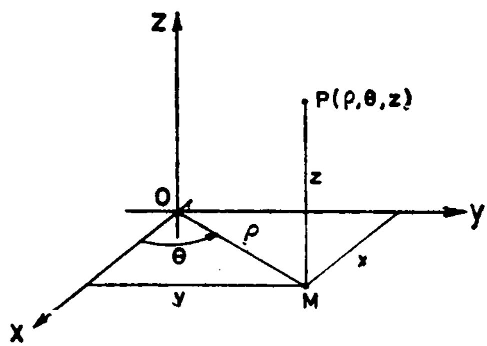
yazılabilir.

19.1 - 2. Silindirik koordinatlar.

P noktasının oxy düzlemindeki izdüşümü olan M noktasının kutupsal koordinatları ile P noktasının z kotuna bu noktanın *silindirik koordinatları* denir ve nokta $P(\rho, \theta, z)$ şeklinde gösterilir. Şekil 178.

P noktasının kartezyen koordinatları ile silindirik koordinatları arasında

$$x = \rho \cos\theta \;,\; y = \rho \sin\theta \;,\; z = z$$

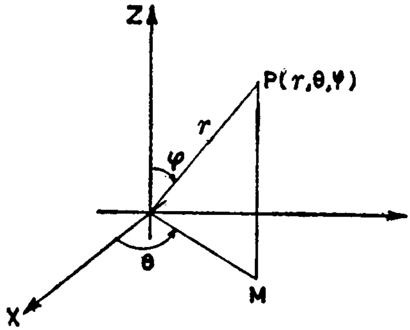


Şekil 178

bağıntılarının bulunduğu kolayca görülebilir.

19.1 - 3. Küresel koordinatlar.

P noktasının O başlangıç noktasına uzaklığı r, $\overline{OP}$ doğrusunun oz in pozitif yönü ile yaptığı açı φ ve $\overline{OP}$ nin oxy düzlemindeki izdüşümünün ox in pozitif yönü ile teşkil ettiği açı θ olmak üzere r, θ, φ ye P noktasının küresel koordinatları denir. (Şekil 179).



Şekil 179

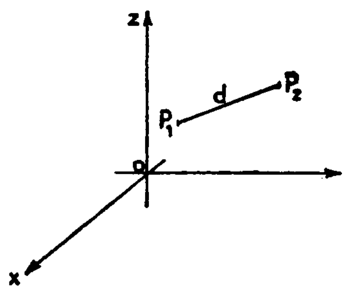
Küresel koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında

$$x = r \cos\theta \sin\varphi \quad , \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \quad , \quad z = r \cos\varphi$$

bağıntılarının mevcut olduğu kolayca görülebilir.

19.1 - 4. İki nokta arasındaki uzaklık.

Koordinatları ile verilen $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün uzunluğuna eşit olup (Şekil 180)



Şekil 180

$$d = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

dir.

19.1 - 5. Bir doğrunun doğrultu açıları, doğrultu kosinüsleri, doğrultu sayıları.

Bir doğrunun ox , oy , oz eksenlerinin pozitif yönleri ile yaptığı α, β, γ açılarına bu doğrunun *doğrultu açıları*, bu açıların kosinüsleri olan $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ya bu doğrunun *doğrultu kosinüsleri* denir. Bunlara göre bir l doğrusunun doğrultu açıları

$$\alpha = (\widehat{ox, l}) \quad , \quad \beta = (\widehat{oy, l}) \quad , \quad \gamma = (\widehat{oz, l})$$

dir.

Şimdi de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktaları ile verilmiş bir l doğrusunun doğrultu kosinüslerini hesaplıyalım. α, β, γ açıları l ile ox, oy, oz eksenleri arasındaki açılar yani $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü ile $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörleri arasındaki açılar ve $|\overrightarrow{P_1P_2}| = d$ olarak

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{i} = |\overrightarrow{P_1P_2}| \cos\alpha = d\cos\alpha$$

$$\boxed{x_2 - x_1 = d\cos\alpha}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{j} = |\overrightarrow{P_1P_2}| \cos\beta = d\cos\beta$$

$$\boxed{y_2 - y_1 = d\cos\beta}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{k} = |\overrightarrow{P_1P_2}| \cos\gamma = d\cos\gamma$$

$$\boxed{z_2 - z_1 = d\cos\gamma}$$

dır. Bunlardan

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d} \quad , \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}}$$

elde edilir.

Bu bağıntıların karelerini alır taraf tarafa toplarsak,

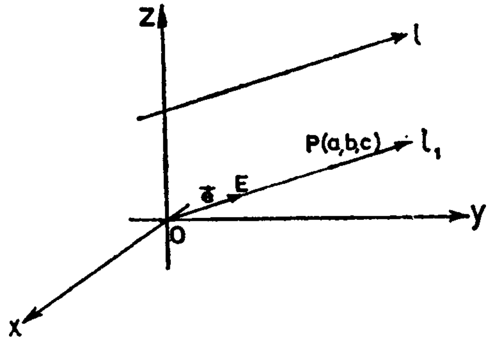
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{d^2}$$

ve 19.1-4. deki bağıntı gözönüne alınırsa

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{d^2}{d^2} = 1$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

elde edilir.



Şekil 181

O noktasından *l* doğrusuna l_1 paralelini çizelim. Bu iki doğrunun doğrultu açıları birbirine eşittir. l_1 üzerinde herhangibir $P(a, b, c)$ noktası alalım. P_1 yerine *O* ve P_2 yerine de *P* alınmak ve $\overline{OP} = d$ kabul etmek suretile (Şekil 181).

$$\cos\alpha = \frac{a}{d}\ , \quad \cos\beta = \frac{b}{d}\ , \quad \cos\gamma = \frac{c}{d}$$

veya

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{1}{d}$$

yazılabilir. Yukarıda elde edilen bağıntılardan da

$$\frac{\cos\alpha}{x_2 - x_1} = \frac{\cos\beta}{y_2 - y_1} = \frac{\cos\gamma}{z_2 - z_1} = \frac{1}{d}$$

bulunabilir. Doğrultu kosinüsleri ile orantılı olan a, b, c ve $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ şeklindeki sayı üçlülerine *l* doğrusunun *doğrultu sayıları* denir. O halde *O* dan *l* ye paralel çizilen l_1 doğrusu üzerindeki herhangibir noktanın koordinatları *l* veya l_1 doğrusunun doğrultu sayılarını verirler. Kolayca görülür ki bir doğrunun sonsuz sayı-

da doğrultu sayıları bulunur. Benzer şekilde l doğrusu üzerinde alınacak herhangibir $\vec{V}$ vektörünün bileşenleri de bu doğrultunun doğrultu sayılarını veriler.

l_1 doğrusu üzerindeki $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$ birim vektörünü gözönüne alalım. Bu vektörün E uç noktasının a, b, c koordinatları ele alınırsa bu takdirde $d = 1$ olarak

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{1}{1} = 1$$

yani

$$a = \cos\alpha \quad , \quad b = \cos\beta \quad , \quad c = \cos\gamma$$

bulunur. Bu da bize $\vec{e}$ birim vektörünün bileşenlerinin bu vektörün doğrultusunun doğrultu kosinüslerini verdiğini gösterir. O halde *bir birim vektörünün bileşenleri aynı zamanda o vektörün doğrultusunun doğrultu kosinüsleridir.*

Doğrultu kosinüsleri bir doğrunun doğrultusunu ve yönünü verirler, doğrultu sayıları ise doğrunun yalnız doğrultusunu verirler.

Doğrultu sayıları biliniyor ise doğrultu kosinüsleri kolayca bulunabilir. Gerçekten

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{1}{d}$$

ve

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

olup

$$\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{d^2}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{ve} \quad d = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

dir. Buna göre

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ve bunlardan da

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{b}{\mp\sqrt{a^2+b^2+c^3}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

bulunur.

ÖRNEK 1. $P_1(6, 4, -5)$ noktasını $P_2(0, -5, 13)$ noktasına birleştiren doğrunun doğrultu sayılarını ve doğrultu kosinüslerini bulunuz.

$\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünün bileşenleri P_1P_2 doğrusunun doğrultu sayıları olup

$$-6 \quad , \quad -9 \quad , \quad 18$$

dir.

Doğrultu kosinüsleri ise

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(-6)^2+(-9)^2+(18)^2} = 21$$

olup

$$\cos\alpha = -\frac{2}{7} \quad , \quad \cos\beta = -\frac{3}{7} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{6}{7}$$

dir.

ÖRNEK 2. Bir l doğrusu için $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ olduğuna göre γ nın mümkün olan değerlerini bulunuz.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2 60^0 + \cos^2 45^0 + \cos^2\gamma = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{4} \quad , \quad \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$$

olup

$$\gamma = 60° \quad \text{ve} \quad \gamma = 120°$$

dir.

ÖRNEK 3. Koordinat eksenlerinin doğrultu kosinüslerini bulunuz.

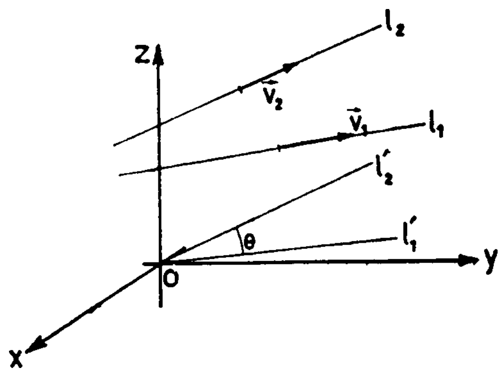
Koordinat eksenlerinin doğrultu kosinüsleri bu eksenlerin $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörlerinin bileşenleri olup

ox	ekseni için	$1 , 0 , 0$
oy	ekseni için	$0 , 1 , 0$
oz	ekseni için	$0 , 0 , 1$

dir.

19.1 - 6. İki doğru arasındaki açı.

Doğrultu sayıları (a_1 , b_1 , c_1) ve (a_2 , b_2 , c_2) olan iki doğru arasındaki θ açısını hesaplamak isteyelim. Bu iki doğruyu temsil eden ve bileşenleri (a_1 , b_1 , c_1) ve (a_2 , b_2 , c_2) olan $\vec{V}_1 , \vec{V}_2$ vektörlerini gözönüne alalım. (Şekil 182)



Şekil 182

$$\vec{V}_1 = (a_1 , b_1 , c_1)$$

$$\vec{V}_2 = (a_2 , b_2 , c_2)$$

olup bu iki vektörün skaler çarpımı

$$\vec{V}_1 \,.\, \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \; |\vec{V}_2| \cos\theta$$

dır. Buradan $\cos\theta$ çözülürse

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \,.\, \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \; |\vec{V}_2|} = \frac{(a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k})\,(a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k})}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\;\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\;\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

elde edilir.

Doğrular birbirine dik ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ olacağından

$$\boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$$

diklik şartı elde edilir. Doğrular birbirine paralel iseler doğrultu sayıları birbirleriyle orantılı olacağından

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

şartı elde edilir.

Yukarıda elde ettiğimiz $\cos\theta$ ifadesinde

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = d_1 \quad ; \quad \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = d_2$$

kabul edilirse

$$\cos\theta = \frac{a_1}{d_1}\frac{a_2}{d_2} + \frac{b_1}{d_1}\frac{b_2}{d_2} + \frac{c_1}{d_1}\frac{c_2}{d_2}$$

yazılır ve

$$\frac{a_1}{d_1} = \cos\alpha_1 \quad , \quad \frac{b_1}{d_1} = \cos\beta_1 \quad , \quad \frac{c_1}{d_1} = \cos\gamma_1$$

$$\frac{a_2}{d_2} = \cos\alpha_2 \quad , \quad \frac{b_2}{d_2} = \cos\beta_2 \quad , \quad \frac{c_2}{d_2} = \cos\gamma_2$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$\boxed{\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2}$$

elde edilir.

ÖRNEK 1. Doğrultu sayıları $(2, 1, -2)$ ve $(3, -6, 2)$ olan doğrular arasındaki açıyı bulunuz.

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$= \frac{2\,.\,3 + 1\,.\,(-6) + (-2)\,.\,2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}\ \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = -\frac{4}{21}$$

olarak

$$\theta = \arccos\left(-\frac{4}{21}\right)$$

dir.

ÖRNEK 2. Doğrultu sayıları $(1\,,-6\,,5)$ olan l_1 doğrusu ile doğrultu sayıları $(8\,,3\,,2)$ olan l_2 doğrusunun birbirine dik olduğunu gösteriniz.

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

diklik şartından

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 1\,.\,8 + (-6)\,.\,3 + 5\,.\,2 = 8 - 18 + 10 = 0$$

olarak iki doğru birbirine diktir.

ÖRNEK 3. $l_1(4\,,-1\,,-7)$ ile $l_2(3\,,-2\,,1)$ doğrultularına dik olan l doğrusunun doğrultu sayılarını bulunuz.

l_1 i temsil eden vektör $\vec{V}_1 = (4\,,-1\,,-7)$

l_2 yi temsil eden vektör $\vec{V}_2 = (3\,,-2\,,1)$

olup bu iki doğrultuya dik olan doğrultu $\vec{V}_1\,,\vec{V}_2$ vektörlerinin vektörel çarpımı doğrultusunda olacaktır. Bu doğrultunun doğrultu sayıları ise

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

vektörünün bileşenleri olacaktır. Bu bileşenler ise

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinden elde edilecek

$$\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

determinantlarının değerlerine yani

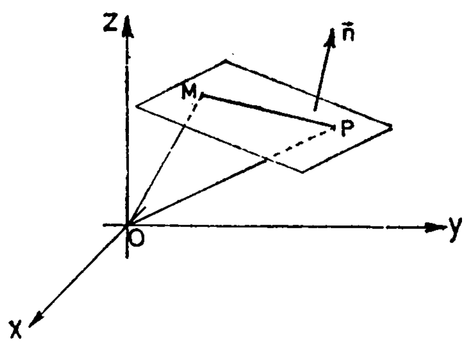
$$-15 \quad , \quad -25 \quad , \quad -5 \quad \text{veya} \quad 3 \; , \; 5 \; , \; 1$$

olacaktır.

19.2 Düzlem.

19.2 - 1. Düzlem denklemi.

Düzleme dik bir $\vec{n} = (A , B , C)$ vektörü ve düzlem üzerinde bir $P(x_1 , y_1 , z_1)$ noktası verilmiş olsun. $M(x , y , z)$ de düzlem üzerinde herhangibir nokta olsun. (Şekil 183)



Şekil 183

Böyle bir düzlemin vektöryel denklemi

$$\boxed{\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0}$$

dır. Bu denklem

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$$

olduğu göz önünde tutularak

$$(\vec{OM} - \vec{OP}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\boxed{\vec{OM} \cdot \vec{n} = \vec{OP} \cdot \vec{n}}$$

şeklinde de yazılabilir.

$$\vec{PM} = (x - x_1)\,\vec{i} + (y - y_1)\,\vec{j} + (z - z_1)\,\vec{k}$$

ve

$$\vec{n} = A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$$

olduğu göz önüne alınırsa $\vec{PM} \cdot \vec{n} = 0$ vektöryel denklemi

$$\vec{PM} \cdot \vec{n} = [(x - x_1)\,\vec{i} + (y - y_1)\,\vec{j} + (z - z_1)\,\vec{k}]\,(A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}) = 0$$

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$$

şekline girer. Bu denklem

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

şeklinde olup x, y, z ye göre lineer bir denklemdir.

Karşıt olarak $Ax + By + Cz + D = 0$ denklemi bir düzlem gösterir yeter ki

$$\vec{OP} \cdot \vec{n} = -D$$

olsun.

$\vec{n}$ vektörü düzlemin normalidir. O halde normalin A, B, C bileşenleri düzlemin normalinin doğrultu sayılarıdır.

19.2 - 2. Düzlem denkleminin muhtelif şekilleri.

1) Normalinin doğrultu sayıları A, B, C *olan ve* (x_1, y_1, z_1) *noktasından geçen bir düzlemin denklemi*

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$$

dır. Düzlem orijinden geçiyorsa denklem

$$\boxed{Ax + By + Cz = 0}$$

şeklini alır.

2) Düzlemin normal şekildeki denklemi

$\vec{n}$ normali $\vec{N} = (a, b, c)$ normal birim vektörü olarak seçilmiş ve P de orijinden düzleme çıkılan dikin ayağı ise

$$|\overrightarrow{OP}| = p$$

olduğu bilindiğine göre düzlemin denklemi

$$\overrightarrow{OP} \, . \, \vec{N} = \overrightarrow{OM} \, . \, \vec{N} = |\overrightarrow{OP}| = p$$

$$\overrightarrow{OM} \, . \, \vec{N} = p$$

olarak

$$(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \, (a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}) = p$$

$$\boxed{ax + by + cz - p = 0}$$

olacaktır. $\vec{N}$ normal birim vektörünün bileşenleri olan a, b, c ler aynı zamanda bu vektörün doğrultu kosinüsleri olup,

$$a = \cos\alpha \quad , \quad b = \cos\beta \quad , \quad c = \cos\gamma$$

olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki denklem

$$\boxed{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0}$$

şekline girer ki bu denkleme, *düzlemin normal şekildeki denklemi* denir.

2.1. *Genel denklemin normal şekle sokulması.*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

denklemleri aynı düzlemi gösteriyorlarsa, bu denklemlerdeki benzer terimlerin katsayıları orantılı yani

$$\frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\cos\beta} = \frac{C}{\cos\gamma} = \frac{D}{-p}$$

olmalıdır. Buradan

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad , \quad p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

elde edilir. $p > 0$ olduğundan $\pm$ işaretlerinden D nin işaretinin aksi işaretin seçileceği kolayca görülür. Buna göre, bu ifadeler normal şekildeki denklemde yerlerine konursa

$$\boxed{\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0}$$

denklemi elde edilir ki bu da genel denklemin normal şekle sokulmuş halidir.

3) $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve $\vec{V}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{V}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ doğrultularına paralel düzlemin denklemi

Düzlem $\vec{V}_1$ ve $\vec{V}_2$ vektörlerine paralel ise düzlemin normali bu

vektörlerin her ikisine de diktir. O halde, düzlemin normali, bu iki vektörün vektöryel çarpımı doğrultusundadır. Buna göre

$$\vec{n} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

dir. Düzlem üzerindeki herhangibir nokta $M(x, y, z)$ ise, denklemi aranan düzlemin vektöryel denklemi

$$\vec{PM} \cdot \vec{n} = \vec{PM} \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = 0$$

$$\boxed{\vec{PM} \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = 0}$$

şeklindedir. Kartezyen denklemi ise, bu karışık çarpım ifadesinden

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

olarak bulunur.

4) $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ***gibi üç noktadan geçen düzlemin denklemi.***

Problem, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_1P_3}$ vektörlerine paralel olan bir düzlemin denklemini bulmağa dönüştürülebilir. Bu takdirde düzlemin vektöryel denklemi

$$\boxed{\vec{P_1M} \cdot (\vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}) = 0}$$

ve kartezyen denklemi de

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

dır.

P_1, P_2, P_3 noktaları düzlemin koordinat eksenleri tarafından delinen noktaları ise

$$P_1(a, 0, 0) \quad , \quad P_2(0, b, 0) \quad , \quad P_3(0, 0, c)$$

olarak düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$bc\,(x-a) + acy + abz = 0$$

$$\frac{x-a}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

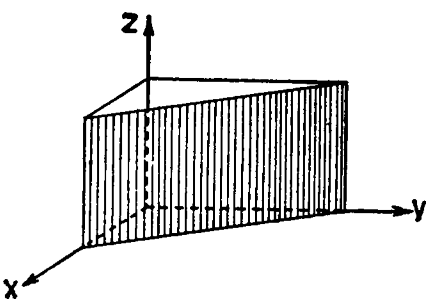
$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

dır.

5) *Koordinat eksenlerinden birine paralel düzlemlerin denklemleri (veya koordinat düzlemlerinden birine dik).*

oz e paralel veya *xoy* ye dik düzlemin denklemi (Şekil 184)

$$\boxed{Ax + By + D = 0}$$



Şekil 184

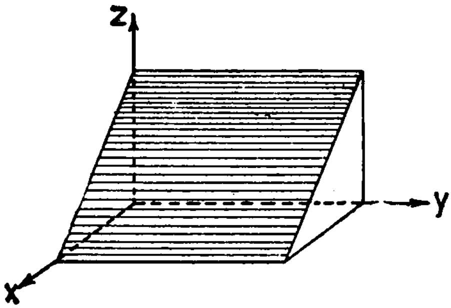
dır. *oy* ye paralel veya *xoz* e dik düzlemin denklemi (Şekil 185)

$$\boxed{Ax + Cz + D = 0}$$

dır. *ox* e paralel veya *yoz* e dik düzlemin denklemi (Şekil 186)

$$\boxed{By + Cz + D = 0}$$

dır.

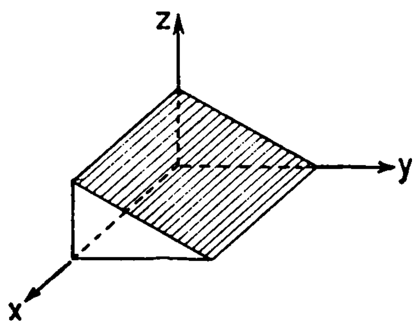


Şekil 185

6) *Koordint eksenlerinden birine dik düzlemlerin denklemleri.*

ox eksenine	dik	düzlem	$Ax + D = 0$	veya	$x = a$
oy »	»	»	$By + D = 0$	»	$y = b$
oz »	»	»	$Cz + D = 0$	»	$z = c$

dir. Koordinat düzlemlerinin denklemleri ise



Şekil 186

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

dır.

7) *Verilmiş bir düzleme paralel düzlemlerin denklemleri.*

Verilen düzlemin denklemi $Ax + By + Cz + D = 0$ ise bu düzleme paralel düzlemlerin denklemleri

$$\boxed{Ax + By + Cz + k = 0}$$

şeklindedir. Bu düzlemlerden herhangibirinin denklemi aranıyorsa, bu düzleme ait bir bilgi yardımiyle k belirtilir ve bu denklemde yerine konur.

8) *Verilmiş iki düzlemin arakesitinden geçen düzlemlerin denklemleri.*

Verilen düzlemlerin denklemleri

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad , \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

ise aranan düzlemlerin denklemleri

$$\boxed{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}$$

şeklindedir. Bu düzlemlerden herhangibirinin denklemi aranıyorsa, bu düzleme ait bilinen bir bilgi yardımiyle k belirtilir ve bu denklemde yerine konur.

ÖRNEK 1. $P(\frac{3}{2}\ ,\ 5\ ,\ 1)$ noktasından geçen ve $A(-\frac{3}{2}\ ,\ -1\ ,\ -1)$, $B(\frac{7}{2}\ ,\ 2\ ,\ \frac{13}{2})$ noktalarını birleştiren doğruya dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

$\overrightarrow{AB}$ düzleme dik olup düzlemin normalidir. O halde doğrultu sayıları

$$\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\ ,\ 2+1\ ,\ \frac{13}{2} + 1 \quad \text{yani} \quad 5\ ,\ 3\ ,\ \frac{15}{2}$$

dir. O halde düzlemin denklemi

$$5(x - \frac{3}{2}) + 3(y-5) + \frac{15}{2}(z-1) = 0$$

$$10x - 15 + 6y - 30 + 15z - 15 = 0$$

$$10x + 6y + 15z - 60 = 0$$

dır.

ÖRNEK 2. $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,-1)$, $P_3(1,3,-1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Üç noktadan geçen düzlem denklemine göre

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$4(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$2x + y + z - 4 = 0$$

dir.

ÖRNEK 3. $2x - 5y + 4z - 12 = 0$ düzlem denklemini **normal** şekle sokunuz.

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = +\sqrt{4 + 25 + 16} = 3\sqrt{5}$$

olup aranan denklem

$$\frac{2}{3\sqrt{5}}\, x - \frac{5}{3\sqrt{5}}\, y + \frac{4}{3\sqrt{5}}\, z - \frac{12}{3\sqrt{5}} = 0$$

dır.

ÖRNEK 4. $P(2,1,-3)$ noktasından geçen ve $5x - 2y + 4z - 9 = 0$ düzlemine paralel düzlemin denklemini bulunuz.

Verilen düzleme paralel düzlemlerin denklemleri

$$5x - 2y + 4z + k = 0$$

şeklinde olup bunlardan $P(2,1,-3)$ den geçeni için

$$5.2 - 2.1 + 4.(-3) + k = 0$$

$$10 - 2 - 12 + k = 0 \quad , \quad k = 4$$

olup denklemi

$$5x - 2y + 4z + 4 = 0$$

dır.

ÖRNEK 5. xoy düzlemine dik ve $P_1(1,5,-3)$, $P_2(-5,-4,11)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Aranan düzlem oz e ve $\overrightarrow{P_1P_2}$ ye paralel olup bunların doğrultu sayıları

$$\vec{k} = (0,0,1) \quad , \quad \overrightarrow{P_1P_2} = (-6,-9,14)$$

olup düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+3 \\ -6 & -9 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$3x - 2y + 7 = 0$$

dır.

19.2 - 3. Düzleme ait uygulamalar.

1. Çakışan düzlemler.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad , \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

düzlemleri aynı bir düzlemi gösteriyor iseler A_1, B_1, C_1, D_1 katsayıları ile A_2, B_2, C_2, D_2 katsayıları orantılı yani

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

olmalıdır.

2. Üç düzlemin kesim noktasını belirtmek için, düzlemlerin denklemlerinden meydana gelen sistemi çözmelidir.

3. Dört noktanın aynı bir düzlem üzerinde olup olmadığını belirtmek için, bunların üçünden geçen düzlemin denklemi bulunur ve dördüncü noktanın koordinatları bu denklemde yerlerine konarak, bu noktanın düzlem üzerinde olup olmadığı araştırılır.

4. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

düzlemleri

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{ise } \textit{paralel}$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad \text{ise } \textit{birbirine dik}$$

durumdadırlar

ÖRNEK. $2x + 3y - z - 2 = 0 \quad , \quad 4x + 6y - 2z - 1 = 0$

düzlemlerinin durumlarını inceleyiniz.

Düzlemlerin normallerinin doğrultu sayıları

$$2, 3, -1 \quad \text{ve} \quad 4, 6, -2$$

ve

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2}$$

olarak düzlemler birbirine paraleldir.

19.2 - 4. Bir noktanın bir düzleme uzaklığı.

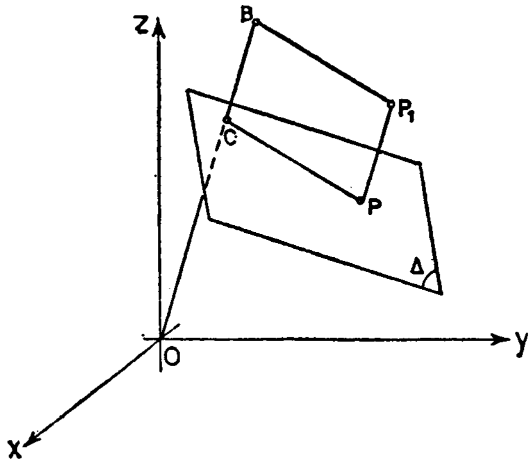
$P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasının

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

düzlemine olan $|\overrightarrow{P_1P}| = d$ uzaklığını hesaplamak isteyelim. (Şekil 187)

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP}$$

olup bu eşitliğin her iki tarafını $\vec{n}$ ile skaler olarak çarpalım. Bu takdirde



Şekil 187

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP_1} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$$

elde edilir.

$$\overrightarrow{OP_1} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad ; \quad \vec{n} = A \vec{i} + B \vec{j} + C \vec{k}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + |\vec{n}| \; |\overrightarrow{P_1P}| \; \varepsilon = Ax + By + Cz$$

veya

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + |\vec{n}| \; |\overrightarrow{P_1P}| \; \varepsilon = -D \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$\varepsilon \, |\vec{n}| \, . \, d = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)$$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\varepsilon \, |\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\varepsilon \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dir. Uzaklığı mutlak değer olarak hesaplarsak

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

elde edilir.

Bu ifade genel denklemin, normal şekildeki ifadesi ile karşılaştırılırsa, d uzaklığını elde etmek için, normal şekildeki ifadede x, y, z yerine P_1 in x_1, y_1, z_1 koordinatlarını koymak gerekir. Buna göre :

$$\boxed{d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|}$$

veya

$$\boxed{d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

dir. $\pm$ den D nin işaretinin aksi olan işaret seçilir. Bu takdirde, P_1 noktası ve O orijini düzleme nazaran başka başka taraflarda ise $d > 0$; aksi halde $d < 0$ bulunur.

ÖRNEK 1. $(4, 2, 10)$ noktasının $6x - 3y + 2z - 10 = 0$ düzlemine uzaklığ,ını hesaplayınız.

$$d = \frac{6 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 10 - 10}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = 4$$

Açı ortay düzlemlerinin denklemi :

Denklemleri

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

olan düzlemlerin açı ortay düzlemlerinin denklemini bulmak isteyelim.

Açı ortay düzlemleri verilen düzlemlerden aynı uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri olup

$$|d_1| = |d_2|$$

den

$$d_1 = d_2 \quad , \quad d_1 = -d_2$$

olarak iki cevap bulunur. Buna göre açı ortay düzlemlerinin denklemleri

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'z + D'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

dir.

ÖRNEK 2. $2x - y - 2z - 3 = 0 \quad , \quad 6x - 3y + 2z + 4 = 0$

düzlemlerinin açı ortay düzlemlerini bulunuz.

$$\frac{2x - y - 2z - 3}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{6x - 3y + 2z + 4}{-\sqrt{36 + 9 + 4}} \quad \text{den} \quad 32x - 16y - 8z - 9 = 0$$

ve

$$\frac{2x-y-2z-3}{+3}=\frac{6x-3y+2z+4}{7} \quad \text{den} \quad 4x-2y+20z+33=0$$

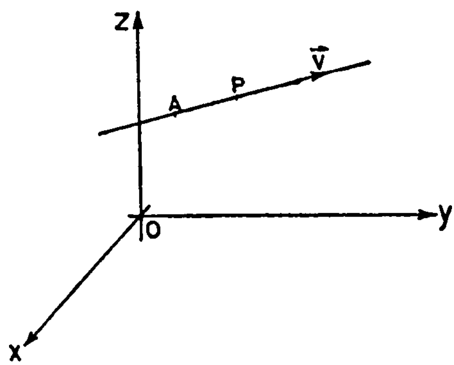
bulunur.

19.3 Doğru

19.3 - 1. Doğru denklemleri.

$\vec{V}=(a\,,b\,,c)$ vektörü ile tanımlı bir doğruyu gözönüne alalım. $A(x_1\,,y_1\,,z_1)$ doğru üzerinde bilinen bir nokta ve $P(x\,,y\,,z)$ de doğru üzerinde herhangi bir nokta olsun. (Şekil 188). Buna göre

$$\boxed{\vec{AP}=t\,\vec{V}}$$



Şekil 188

vektörel eşitliği kolayca yazılabilir. Burada t skaler bir parametredir. Bu denklem sözü edilen doğrunun *vektöryel denklemi* dir. Bu geometrik eşitliği koordinat eksenleri üzerine izdüşürürsek

$$x-x_1=at$$

$$y-y_1=bt$$

$$z-z_1=ct$$

veya

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x_1+at\\ y&=y_1+bt\\ z&=z_1+ct \end{aligned}}$$

elde edilir ki bunlar da *doğrunun parametrik denklemleridir.*

Bu denklemlerden t yok edilirse

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

elde edilir ki bu da doğrunun *simetrik şekildeki denklemi* dir. Buradaki a, b, c ler doğrunun doğrultu sayılarıdır.

Eğer doğru $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçiyorsa doğrultu sayıları

$$x_2-x_1 \quad , \quad y_2-y_1 \quad , \quad z_2-z_1$$

olup denklemi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

dir. Bu denklem, *iki noktadan geçen doğrunun* denklemidir.

19.3 - 2. Bir doğrunun genel denklemi.

Bir doğru, genel olarak, paralel olmayan iki düzlemin arakesiti olarak tanımlanır. O halde bir doğrunun genel denklemi

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}$$

dır. Çünkü arakesit üzerindeki her noktanın koordinatları bu denklemleri sağlar.

Genel denklemi ile verilmiş bir doğrunun doğrultu sayıları kolayca bulunabilir ve dolayısile genel denklemden diğer şekildeki denklemlere geçilebilir.

Bu düzlemlerin normalleri

$$\vec{n}_1=(A_1, B_1, C_1) \quad , \quad \vec{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$$

ise, arakesit doğrusu bu normallerin her ikisine de dik olacağından, doğrultusu

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

doğrultusunda olacaktır. Buna göre

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

olarak doğrultu sayıları,

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

matrisinden elde edilebilecek olan

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

determinantlarının değerleridir.

Doğru üzerindeki bir noktanın koordinatları, bunlardan biri keyfi olarak seçilerek, genel denklemden belirtilebilir. Böyle bir nokta (x_0, y_0, z_0) ise genel denklemi ile verilmiş bir doğrunun simetrik şekildeki denklemi

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

dir.

ÖRNEK 1. Genel denklemi

$$3x + 2y + 4z + 5 = 0$$

$$x - y + 2z - 4 = 0$$

olan doğrunun simetrik şekildeki denklemini yazınız.

$$\vec{n}_1 = (3\,,2\,,4) \quad , \quad \vec{n}_2 = (1\,,-1\,,2)$$

olup doğrunun doğrultu sayıları

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinden

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

veya

$$(8, -2\,, -5)$$

olarak bulunur.

Doğrunun üzerindeki bir nokta, $z = 0$ seçilirse

$$3x + 2y = -5$$

$$x - y = 4$$

den $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{17}{5}$ olarak $(\frac{3}{5}\,,\,-\frac{17}{5}\,,\,0)$ dır. Bunlara göre aranan denklem

$$\frac{x - \frac{3}{5}}{8} = \frac{y + \frac{17}{5}}{-2} = \frac{z - 0}{-5}$$

dir.

ÖRNEK 2. $(1\,,3\,,-1)$ noktasından geçen, $-y + 2z + 3 = 0$, $x - z = 0$ doğrusuna dik ve $3x + 2y - z + 5 = 0$ düzlemine paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

$-y + 2z + 3 = 0$, $x - z = 0$ doğrusunun doğrultu sayıları

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinden $(1\,,2\,,1)$ olarak bulunur. Denklemi aranan doğru

$3x + 2y - z + 5 = 0$ düzlemine paralel olduğuna göre bu düzlemin normaline dik olur. O halde doğru, $(1, 2, 1)$ ve $(3, 2, -1)$ doğrultularına dik olup bu iki doğrultuyu temsil eden vektörlerin vektöryel çarpımı doğrultusundadır. Bu doğrultu ise

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

vektörünün doğrultusu yani

$$-4, 4, -4 \quad \text{veya} \quad 1, -1, 1$$

doğrultusudur.

Buna göre problem, $(1, 3, -1)$ noktasından geçen ve doğrultu sayıları $(1, -1, 1)$ olan doğrunun denklemini yazmağa dönüşmüş olur ki bu da

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

dır.

19.3 - 3. Bir düzlemin bir doğru tarafından delinmesi.

1) Eğer doğru, genel denklemi ile verilmiş ise, problem üç düzlemin kesişme noktasını bulmaya dönüşmüş olur. Yani doğru

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

denklemleri ile ve düzlem de

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

denklemi ile verilmiş ise doğrunun düzlemi deldiği noktanın koordinatları bu üç denklemden meydana gelmiş denklem sisteminin çözüm takımıdır.

2) Doğru $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ ve düzlem de $Ax+By+Cz+D=0$ denklemleriyle, verilmiş olsun. Bu takdirde doğrunun parametrik denklemleri

$$x=x_1+at \quad , \quad y=y_1+bt \quad , \quad z=z_1+ct$$

olup doğru ile düzlemin ortak noktasına karşılık olan t,

$$(Aa+Bb+Cc)\,t+Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

denkleminin köküdür. Bu denklemde

I. $Aa+Bb+Cc\neq 0$ ise bir tek çözüm vardır. Yani doğru düzlemi bir noktada deler.

II. $Aa+Bb+Cc=0$ ve $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$ ise çözüm yoktur. Bu takdirde doğru düzleme paraleldir.

III. $Aa+Bb+Cc=0$ ve $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ ise t yi veren denklem özdeşlik olur ve doğru düzlem üzerinde bulunur.

19.3 - 4. Bir doğru ile düzlemin birbirine göre durumları.

TEOREM. Doğrultu sayıları a, b, c olan bir doğru ile $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemi :

1) $Aa+Bb+Cc=0$ olduğu zaman birbirine paralel;

2) $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$ olduğu zaman birbirine diktirler.

İspat : Doğru düzleme paralel ise düzlemin normaline dik olacağından

$$Aa+Bb+Cc=0$$

olacaktır. Doğru düzleme dik ise, normaline paralel olacağından

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$$

olacaktır.

19.3 - 5. Bir doğrudan geçen düzlemler.

a) Bir doğrudan ve $M(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen düzlemin denklemi :

1) Doğru iki düzlem denklemi ile yani genel denklemi ile verilmişse, bu iki düzlemin arakesitinden geçen düzlemlerden M den geçeni aranır.

2) Doğru iki noktası ile verilmiş ise problem üç noktadan geçen düzlemin denklemini bulmağa dönüşür. Bu halde denklem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dir.

3) Doğru, $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ denklemi ile verilmiş ise $P(x, y, z)$ aranan düzlemin herhangibir noktası olarak problem, $M(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve a, b, c ile $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ doğrultularına paralel olan düzlemin denklemini bulmağa dönüşür. Bu halde denklem

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

dır.

b) Bir doğrudan geçen ve verilmiş bir (a_1, b_1, c_1) doğrultusuna paralel olan düzlemin denklemi.

Doğru $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ denklemi ile verilmiş ise problem (x_1, y_1, z_1) noktasından geçen ve (a, b, c) , (a_1, b_1, c_1) doğrultularına paralel olan düzlemin denklemini bulmağa dönüşür.

c) İki doğrunun aynı bir düzlemde bulunması şartı.

Denklemleri

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad ; \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

olan doğruların aynı düzlemde olmaları şartını araştıralım.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{V}_1=(a_1, b_1, c_1)$ ve $\vec{V}_2=(a_2, b_2, c_2)$ olarak $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ vektörlerinin aynı düzlemde olduklarını yazmak gerekir. Bunun için de bu üç vektörün karışık çarpımının sıfır yani

$$\overrightarrow{M_1M_2} . (\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2) = 0$$

olmasını yazmak gerekir. Buna göre aranan düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

dir.

ÖRNEK 1. $M(-1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$ doğrusundan geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Aranan düzlem, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$ doğrusundan geçtiğine göre $P(1, 2, 3)$ noktasından da geçecek ve $\overrightarrow{MP}$ vektörü ile $(-1, 0, -1)$ doğrultusuna paralel olacaktır. $\overrightarrow{MP}$ nin doğrultu sayıları $(2, 0, 0)$ olup düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$-2(y-2)=0 \quad , \quad y=2$$

dir.

ÖRNEK 2. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{-1} \quad ; \quad \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$
doğrularının belirttiği düzlemin denklemini bulunuz.

Bu iki doğru birbirine paralel olup bir düzlem belirtirler. $A(0,1,-2)$ noktası birinci doğru üzerinde ve $B(2,-1,0)$ noktası ikinci doğru üzerinde olup $\overrightarrow{AB}$ vektörü bu iki doğrunun meydana getirdiği düzlem üzerindedir ve dolayısile bu düzleme paraleldir. Bu vektörün doğrultu sayıları

$$2 \quad , \quad -2 \quad , \quad 2$$

dır. O halde problem, $A(0,1,-2)$ noktasından geçen ve $(2,3,-1)$, $(2,-2,2)$ doğrultularına paralel olan düzlemin denklemini bulmağa dönüşmüş olur. Buna göre, verilen iki doğrunun belirttiği düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

dan

$$4x-6(y-1)-10(z+2)=0 \quad \text{veya} \quad 2x-3y-5z-7=0$$

olarak bulunur.

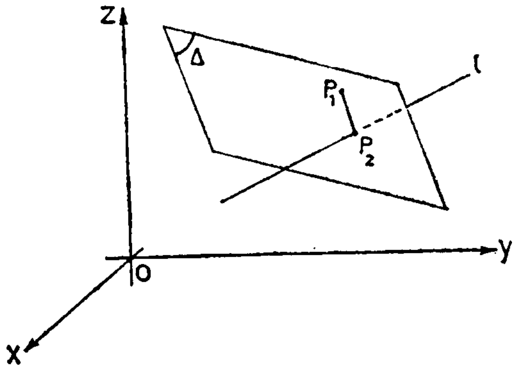
19.3-.6. Bir noktanın bir doğruya uzaklığı.

Bir P_1 noktasının bir l doğrusuna uzaklığını bulmak isteyelim. Bunun için, P_1 noktasından geçen ve l doğrusuna dik çizilen bir Δ düzleminin l doğrusu tarafından delindiği P_2 noktasının, P_1 e uzaklığını hesaplamak yeterlidir. Bu uzaklık aranılan d uzaklığını verir. (Şekil 189)

ÖRNEK 1. $P_1(6,-3,3)$ noktasının

$$2x+2y+z=0 \quad , \quad 4x-y-3z-15=0$$

doğrusuna uzaklığını hesaplayınız.



Şekil 189

Δ düzleminin denklemini bulmak için l doğrusunun doğrultu sayılarını bulmak gerekir. Bunlar da

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinden $1, -2, 2$ olarak bulunur. O halde $P_1(6, -3, 3)$ noktasından geçen ve normalinin doğrultu sayıları $1, -2, 2$ olan Δ düzleminin denklemi

$$(x-6) - 2(y+3) + 2(z-3) = 0$$

$$x - 2y + 2z - 18 = 0$$

dir. l doğrusunun bu düzlemi deldiği noktanın koordinatları ise l doğrusu ve Δ düzleminin denklemlerinin meydana getirdiği

$$2x + 2y + z = 0$$

$$4x - y - 3z - 15 = 0$$

$$x - 2y + 2z - 18 = 0$$

sisteminin çözüm takımı olan $P_2(4, -5, 2)$ dir. Bunlara göre aranan d uzaklığı

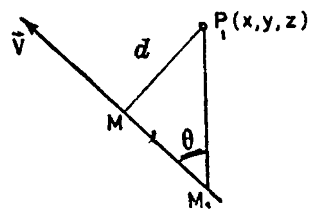
$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(6-4)^2 + (-3+5)^2 + (3-2)^2} = 3$$

dür.

Şimdi de bir noktanın bir doğruya uzaklığını vektörel olarak diğer bir şekilde hesaplıyalım. Doğru

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

denklemiyle verilmiş ve nokta da $P_1(x_1, y_1, z_1)$ olsun Doğruyu tanımlayan vektör $\vec{V} = (a, b, c)$ dir. (Şekil 190) P_1 den doğruya indirilen dikin ayağı M olduğuna göre aranılan uzaklık $\overline{P_1M} = d$ dir. Doğru üzerindeki bir M_1 noktasını P_1 ile birleştirelim. Bu takdirde, $\overrightarrow{M_1P_1}$ ile $\vec{V}$ arasındaki açı θ olarak



Şekil 190

$$d = |\overrightarrow{P_1M}| = |\overrightarrow{M_1P_1}| \sin\theta$$

ve

$$|\overrightarrow{M_1P_1} \wedge \vec{V}| = |\overrightarrow{M_1P_1}|\,|\vec{V}| \sin\theta = d\,|\vec{V}|$$

olup

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{M_1P_1} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|}}$$

bulunur.

ÖRNEK 2. (7, 7, 4) noktasının $6x + 2y + z - 4 = 0$, $6x - y - 2z - 10 = 0$ doğrusuna uzaklığını hesaplayınız.

Verilen doğrunun doğrultu sayıları

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{den} \quad (1, -6, 6)$$

olup $\vec{V} = (1, -6, 6)$ dır. Doğru üzerindeki bir nokta olarak $z = 0$ kotlu noktayı seçersek $M_1(\frac{4}{3}, -2, 0)$ olur. Buna göre

$$\overrightarrow{M_1P_1} = (7 - \frac{4}{3}, 7 + 2, 4) = (\frac{17}{3}, 9, 4)$$

olup

$$\overrightarrow{M_1P_1} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{17}{3} & 9 & 4 \\ 1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -78\,\vec{i} - 30\,\vec{j} - 43\,\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{M_1P_1} \wedge \vec{V}| = \sqrt{(-78)^2 + (-30)^2 + (-43)^2} = \sqrt{8833}$$

ve

$$|\vec{V}| = \sqrt{1 + 36 + 36} = \sqrt{73}$$

olarak

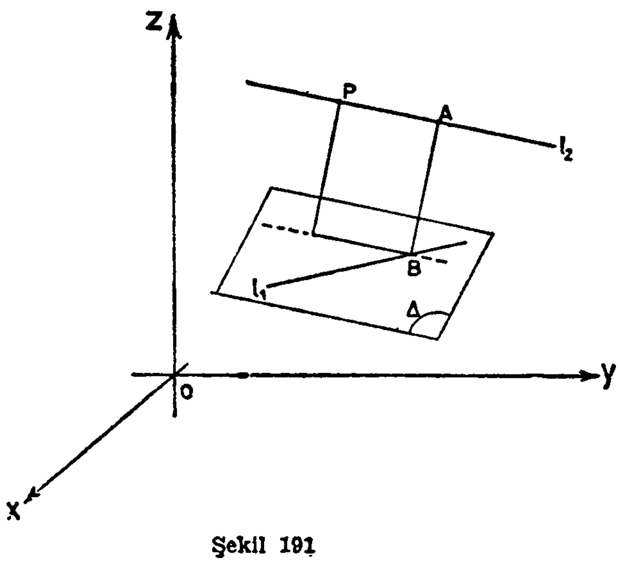
$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1P_1} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{8833}}{\sqrt{73}} = \sqrt{\frac{8833}{73}} = 11$$

dir.

19.3 - 7. İki doğrunun ortak dikmesi ve iki doğru arasındaki en kısa mesafe.

Uzayda verilen herhangi iki doğruya ortak bir dikme **çizilebilir.** Ortak dikmenin uzunluğu bu iki doğru arasındaki en kısa **mesafedir.**

Aynı düzlemde bulunmayan iki doğru l_1 ve l_2 olsun. l_1 doğrusundan geçen ve l_2 ye paralel olan Δ düzlemini ve l_2 nin bu düzlem üzerindeki izdüşümünü çizelim. Bu izdüşüm doğrusunun l_1 doğrusunu kestiği B noktasından l_1 e BA dikini çizelim. Bu dik aranılan or-



Şekil 191

tak dikme ve BA uzunluğu da bu iki doğru arasındaki en kısa mesafedir.

Buna göre l_2 üzerinde alınacak herhangi bir P noktasının Δ düzlemine uzaklığı $d = \overline{BA}$ ya eşittir.

Bu şekildeki tanım yolu iki doğru arasındaki en kısa mesafeyi hesaplamağa imkân verir. Bunu bir örnekle gösterelim.

ÖRNEK 1. l_1 $(2x - y + z + 3 = 0 \;,\; x + y + 2z + 3 = 0)$ ve l_2 $(x - y - z - 1 = 0 \;,\; 3x - z - 7 = 0)$ doğruları arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

l_1 den geçen ve l_2 ye paralel olan düzlemin denklemini bulmak üzere l_1 ve l_2 nin doğrultu sayılarını bulalım.

l_1 inkiler $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinden $(1, 1, -1)$

l_2 ninkiler $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinden $(1, -2, 3)$;

l_1 üzerindeki bir nokta olarak $z = 0$ kotlu noktayı seçersek koordinatları $(-2, -1, 0)$ olur. O halde l_1 den geçen ve l_2 ye paralel çizilen düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = x - 4y - 3z - 2 = 0$$

dır. Şimdi de l_2 doğrusu üzerinde herhangi bir nokta seçerek bunun Δ düzlemine uzaklığını hesaplıyalım. l_2 üzerindeki nokta $P(0, 6, -7)$ olarak seçilirse en kısa mesafe

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{0 - 4 . 6 - 3 \cdot (-7) - 2}{\sqrt{1 + 4^2 + 3^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

olarak bulunur.

Ortak dikmenin denklemi.

Ortak dikme, l_1 ve ortak dikmeden geçen düzlem ile, l_2 ve ortak dikmeden geçen düzlemin arakesiti olarak düşünülebilir.

l_1 ve l_2 doğruları

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad ; \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

denklemleriyle verilmiş olsun. Bunların ortak dikmesinin doğrultu sayıları

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

vektörünün bileşenleri olup

$$a = b_1c_2 - b_2c_1 \qquad b = a_2c_1 - a_1c_2 \qquad c = a_1b_2 - a_2b_1$$

dir.

Bunlara göre ortak dikme ve l_1 den geçen düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0 \quad ;$$

ortak dikme ve l_2 den geçen düzlemin denklemi ise

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

olup bu iki denklem ortak dikmenin denklemidir.

ÖRNEK 2. l_1 $(2x-y+z+3=0 \;,\; x+y+2z+3=0)$ ve l_2 $(x-y-z-1=0 \;,\; 3x-z-7=0)$ doğrularının ortak dikmesinin denklemini bulunuz.

l_1 in doğrultu sayıları $(1, 1, -1)$ (bak. ÖRNEK 1)

l_2 nin doğrultu sayıları $(1, -2, 3)$ (bak. ÖRNEK 1)

olup ortak dikmenin doğrultu sayıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ den } (1, -4, -3)$$

olarak bulunur.

l_1 üzerindeki bir nokta $(-2, -1, 0)$; l_2 üzerindeki bir nokta $P(0, 6, -7)$ olsun. (bak. ÖRNEK 1) Bunlara göre

l_1 den ve ortak dikmeden geçen düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7x - 2y + 5z + 12 = 0$$

ve l_2 ile ortak dikmeden geçen düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x & y-6 & z+7 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -18x - 6y + 2z + 50 = 0$$

olarak ortak dikmenin denklemi

$$7x - 2y + 5z + 12 = 0$$

$$9x + 3y - z - 25 = 0$$

dır.

İki doğru arasındaki en kısa mesafe *(Ortak dikmenin uzunluğu)*

Bu mesafe, l_2 üzerindeki bir P noktasının l_1 den l_2 ye paralel çizilen düzleme uzaklığıdır. Bu düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

olup l_2 üzerindeki $P(x_2, y_2, z_2)$ noktasının bu düzleme uzaklığı

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

dir. (sonucun mutlak değeri alınmalıdır)

ÖRNEK 3. $l_1(2x - y + z + 3 = 0 \quad , \quad x + y + 2z + 3 = 0)$ ve $l_2(x - y - z - 1 = 0 \quad , \quad 3x - z - 7 = 0)$ doğrularının ortak dikmesinin uzunluğunu bulunuz.

l_1 in doğrultu sayıları $(1, \; 1, -1)$; üzerindeki bir nokta $(-2, -1, \; 0)$;

l_2 nin doğrultu sayıları $(1, -2, \; 3)$: » » » $(\; 0, \; 6, -7)$;

ve ortak dikmenin doğrultu sayıları $(1, -4, -3)$ olarak ortak dikmenin uzunluğu :

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 0+2 & 6+1 & -7-0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + 16 + 9}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\sqrt{26}}$$

$$d = \left| \frac{-5}{\sqrt{26}} \right| = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

dır.

19.4 Yüzeyler ve eğriler.

19.4 - 1. Giriş.

Şimdiye kadar x, y, z ye göre birinci dereceden olan bir denklemin bir *düzlem* ve iki denklemin de bir *doğru* gösterdiğini gördük.

Genel olarak, $F(x, y, z) = 0$ şeklinde bir denklem bir *yüzey* ve herbiri bir yüzey gösteren iki denklem de bir uzay eğrisi gösterir.

$F(x, y, z) = 0$ şeklindeki herhangi bir denklemin gösterdiği yüzey, bu yüzeyin koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle meydana getirdiği arakesit eğrileri yardımiyle incelenebilir. Örneğin, herhangibir yüzey denkleminde $z = 0$ yapılırsa, x ile y arasında elde edilen bağıntının, bu yüzeyin xoy düzlemi ile arakesit eğrisini göstereceği aşikârdır. z_1 sonlu ve sabit bir değer olarak $F(x, y, z) = 0$ da $z = z_1$ yapılırsa x ile y arasında elde edilecek bağıntı, xoy düzlemine paralel ve ondan z_1 uzaklığında olan düzlemin, yüzeyde meydana getirdiği arakesit eğrisini gösterecektir.

Bu kuralın uygulanmasında, herşeyden evvel yüzeyin birinci bölgede koordinat düzlemleriyle meydana getirdiği arakesit eğrileri çizilmelidir. Bu eğriler yüzeyin şekli hakkında genel bir fikir verir.

19.4 - 2. Küre.

Merkezi $M(h, k, l)$ noktasında r yarıçaplı bir kürenin denklemini bulmak isteyelim. Küre yüzeyi üzerindeki herhangibir nokta $P(x, y, z)$ ise her P noktası için

$$|\overrightarrow{PM}| = r \quad \text{veya} \quad (\overrightarrow{PM})^2 = r$$

olacaktır. O halde aranan denklem

$$(\overrightarrow{PM})^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2$$

olup

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2} \qquad (1)$$

dir. Bu denklem genel olarak

$$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+K=0 \qquad (2)$$

şeklindedir. Buna göre, yz, xz, xy li terimleri içermiyen ve x^2, y^2, z^2 li terimlerin katsayıları eşit olan, x, y, z ye göre ikinci dereceden bir denklem küre gösterir.

(2) denklemi, tam kare kılma yolu ile (1) denklemi şekline dönüştürülebilir. Bu takdirde, (1) şeklindeki denklemin ikinci tarafı, pozitif ise (2) denklemi bir küre gösterir; sıfır ise, yarı çapı sıfır olan bir küre veya (h, k, l) merkezini gösterir; negatif ise, birşey göstermez.

Özel olarak $h=k=l=0$ ise merkezi orijinde olan kürenin denklemini elde ederiz. Böyle bir kürenin denklemi

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=r^2}$$

şeklindedir.

19.4 - 3. Silindirler.

Bir doğrunun, bir eğri üzerinde diğer bir doğruya paralel kalarak hareket etmesi halinde meydana getirdiği yüzeye *silindirik yüzey veya silindir* denir. Yüzeyi çizen doğru, *ana doğru* ve doğrunun üzerinde hareket ettiği eğri de *doğrultman* adını alır.

Örneğin $F(x, y)=0$ denklemi düzlemde bir eğri gösterdiği halde uzayda bir yüzey gösterir. $F(x, y)=0$ yüzeyi, xoy düzlemindeki $F(x, y)=0$ eğrisinin üzerinde, oz eksenine paralel olarak, hareket eden bir doğrunun meydana getirdiği silindirik yüzeydir. Bu silindir üzerindeki noktaların koordinatlarının $F(x, y)=0$ denklemini sağlıyacağı açıktır. Aynı şekilde uzayda $F(x, z)=0$ denklemi ile verilen yüzey, zox düzlemindeki $F(x, z)=0$ eğrisi üzerinde, oy eksenine paralel kalarak, hareket eden bir doğrunun meydana getirdiği silindirdir. Şekil 192,

$y = e^x$ silindirini göstermektedir.

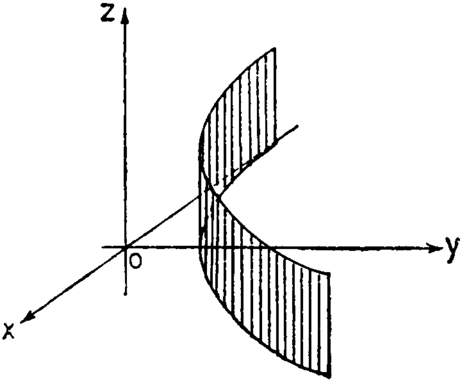
Uzayda,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi *eliptik silindir*

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi *hiperbolik silindir*

$y^2 = 2px$ denklemi *parabolik silindir*

adı verilen silindirleri gösterir.

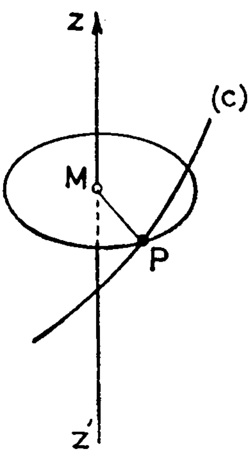


Şekil 192

19.4 - 4. Dönel yüzeyler.

Bir eğrinin, bir doğru etrafında dönmesinden meydana gelen yüzeye *dönel yüzey* denir.

z'z, yüzeyin dönme ekseni ve *c* de doğrultman eğrinin durumlarından biri olsun. (Şekil 193). *c* eğrisinin her *P* noktası, dönme esnasında *z'z* i eksen kabul eden bir çember çizer. Yani *M* merkezi bu eksen üzerinde ve düzlemi de bu eksene diktir. Buna yüzeyin bir *paraleli* denir. Yüzey bu paralellerden meydana gelmiş farzedilebilir.



Şekil 193

Buna göre, yüzeyin eksene dik düzlemlerle arakesitleri birer çember verir.

Özel olarak, yüzeyi eksenden geçen bir yarı düzlemle kesersek, eksen etrafında dönen (*c*) eğrisinin bir durumunu elde ederiz. Bu arakesit eğrilerine yüzeyin *meridyenleri* denir.

Dönme hareketini koordinat eksenlerinden biri etrafında ve örneğin *oz* ekseni etrafında yaparak elde edilecek dönel yüzeyin denklemini bulmağa çalışalım. Bu takdirde *yoz* düzlemindeki meridyene *asal meridyen* adı verilir.

Asal meridyenin denkleminin

$$y = h(z)$$

olarak verildiğini kabul edelim. z kotlu bir P noktasının yüzeye ait olabilmesi için, bu noktanın eksene uzaklığının MP_1 yarıçapına eşit yani $\overline{PM} = \overline{MP_1}$ olması gerek ve yeterdir. (Şekil 194)

Halbuki

$$\overline{PM} = \overline{P'O} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ve

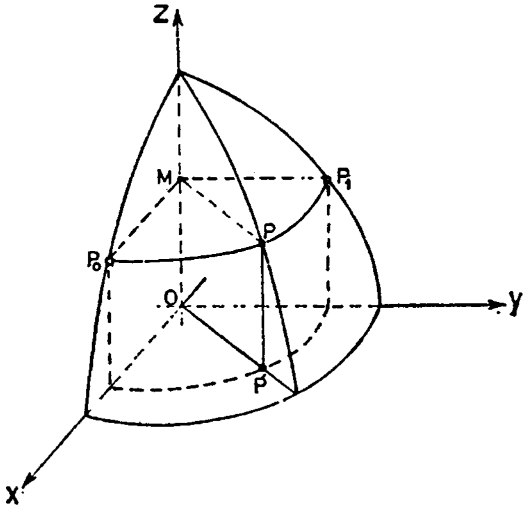
$$\overline{MP_1} = y = h(z)$$

olup

$$\overline{PM} = \overline{MP_1}$$

de yerlerine konursa

$$\boxed{\sqrt{x^2 + y^2} = h(z)}$$



Şekil 194

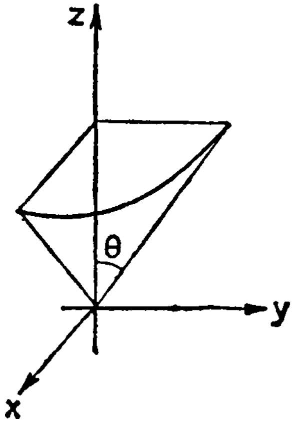
elde edilir. Buna göre oz ekseni etrafında dönmeden elde edilecek yüzeyin denklemini elde etmek için asal meridyenin denkleminde y yerine $\sqrt{x^2 + y^2}$ koymalıdır.

ÖRNEK 1. $3z = 24 - y^2$ parabolunun oz ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen yüzeyin denklemini bulunuz.

Bu denklemde y yerine $\sqrt{x^2 + y^2}$ yazılırsa

$$3z = 24 - (x^2 + y^2) \quad \text{veya} \quad x^2 + y^2 = 24 - 3z$$

elde edilir.



Şekil 195

ÖRNEK 2. *Dönel koni.*

Koninin tepesi O da, ekseni oz ve tepe açısı da θ olsun. (Şekil 195). Asal meridyenin denklemi

$$y = z \operatorname{tg} \theta$$

olup y yerine $\sqrt{x^2 + y^2}$ yazılırsa

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{tg} \theta$$

veya

$$\boxed{x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta}$$

elde edilir.

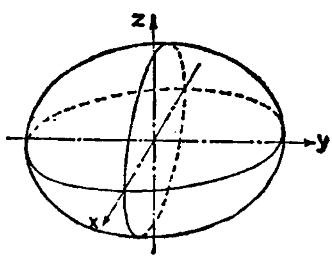
19.4 - 5. İkinci derece yüzeyler.

Denklemleri x, y, z ye göre ikinci derece olan yüzeylere ikinci derece yüzeyler veya kuadrikler denir. Bu yüzeylerin genel denklemleri

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0}$$

şeklindedir. Bu yüzeylerden bir tanesi küre olup bunu daha evvel incelemiştik. (Bak 19.4-2.) Şimdi de bu yüzeylerden bazılarını inceliyelim.

1. *Elipsoid.*



Şekil 196

Denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

şeklinde bir yüzeye *elipsoid* denir. (Şekil 196) Bazı simetri özelikleri vardır. Koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle arakesitleri elipslerdir. $a = b = c$ ise yüzey küre olur.

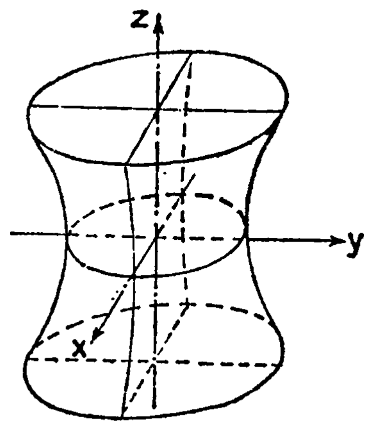
II. *Bir parçalı hiperboloid.*

Denklemi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

şeklinde olan bir yüzeye *bir parçalı hiperboloid* denir. Bu yüzeyin xoy düzlemi ile arakesiti $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsidir. xoy düzlemine paralel kesitleri elipsler; diğer koordinat düzlemlerine paralel kesitleri hiperbollerdir. (Şekil 197).

$a=b$ olursa *dönel hiperboloid* elde edilir ki xoy düzlemine paralel kesitleri daire olur.



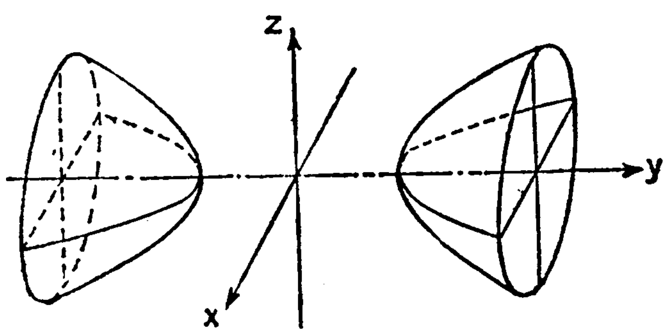
Şekil 197

III. *İki parçalı hiperboloid.*

Denklemi

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

olan yüzeye *iki parçalı hiperboloid* denir. xoy düzlemine paralel kesitleri hiperboller'dir. $y=b$ düzlemi ile kesiti nokta elips; $|y|>b$ halindeki kesitler elipslerdir. $a=c$ olursa bu elipsler daireler olarak dönel hiperboloid elde edilir. (Şekil 198),



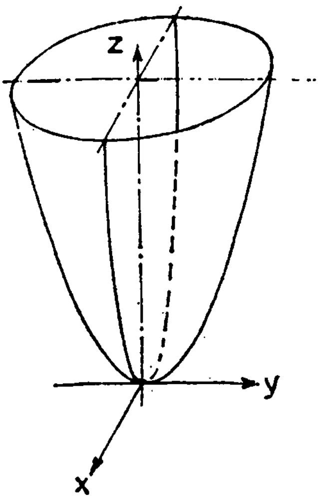
Şekil 198

IV. *Eliptik paraboloid.*

Denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

şeklinde olan bir yüzeye *eliptik paraboloid* denir. (Şekil 199). Bu yüzeyin xoy düzlemine paralel kesitleri elips ve diğer koordinat düzlemlerine paralel kesitleri de parabollerdir. $a = b$ ise, elips olan kesitler daire olarak yüzey, bir dönel paraboloid olur.



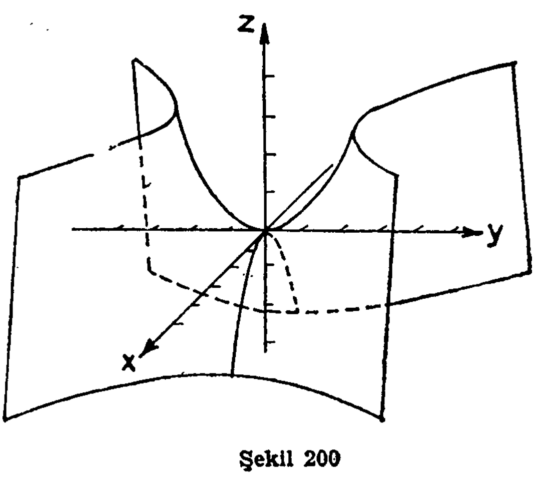
Şekil 199

V. *Hiperbolik paraboloid.*

Denklemi

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = z$$

olan bir yüzeye *hiperbolik paraboloid* denir. Bu yüzeyin xoy düzlemi ile arakesiti $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$ denkleminin gösterdiği iki doğrudur. xoy düzlemine paralel ve onun üst tarafında kalan kesitler, eksenleri oy eksenine paralel hiperboller; alt tarafında kalan kesitler ise eksenleri ox eksenine paralel hiperbollerdir. Diğer koordinat düzlemlerine paralel kesitler ise parabollerdir. (Şekil 200).



Şekil 200

VI. *Eliptik koni.*

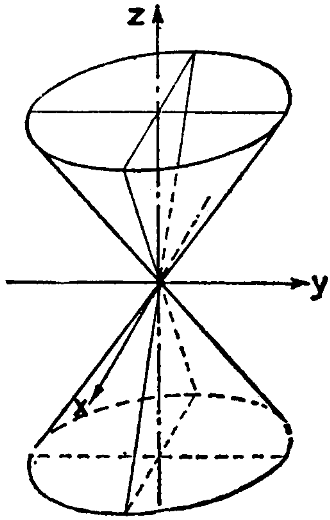
Denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

olan yüzeye ***eliptik koni*** denir. (Şekil 201). Bu yüzeyin xoy düzlemi ile arakesiti, denklemi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

olan nokta elipstir. xoy düzlemine paralel kesitleri elipsler; diğer koordinat düzlemleriyle olan arakesitleri orijinden geçen iki doğru ve bu koordinat düzlemlerine paralel kesitleri dehiperbollerdir. $a=b$ ise elips olan kesitler daire ve yüzey de dönel koni olur.



Şekil 201

19.4 - 6. Uzay eğrileri.

Uzayda eğri, iki yüzeyin arakesiti olarak düşünülebilir. O takdirde eğri bu yüzeylerin denklemleriyle belirtilir. Buna göre

$$F(x,y,z)=0 \quad , \quad G(x,y,z)=0$$

gibi iki denklem bir (c) eğrisini tanımlar, (c) eğrisinden sonsuz sayıda yüzey geçirmek mümkündür. (c) eğrisi bunlardan herhangi ikisi ile belirtilebilir.

$$F(x,y,z)+\lambda G(x,y,z)=0$$

yüzey ailesinden λ nın λ_1 ve λ_2 değerlerine karşılık gelen yüzeylerle (c) eğrisi belirtilebilir.

$P(x,y,z)$ noktasını orijine birleştiren $\overrightarrow{OP}$ vektörünü

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=\vec{r}(t)}$$

ile gösterebiliriz. Bu vektör P noktasının *yer vektörü* adını alır. Noktanın geometrik yeri bir (c) eğrisini verir. Bu takdirde

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

eğrinin vektörel denklemi olur. Eğer bu eğri üzerindeki bir noktanın koordinatları bir t parametresine bağlı olarak

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad z = h(t)$$

şeklinde verilmiş ise eğrinin vektörel denklemi

$$\boxed{\vec{r}(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k}}$$

şekline girer. Bu vektörün bileşenleri olan

$$\boxed{x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad z = h(t)}$$

denklemleri de *uzay eğrisinin parametrik denklemleri* olur.

19. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

DÜZLEM VE DOĞRU :

1) Köşeleri $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$ ve $C(-3, 2, 1)$ olan üçgenin ikizkenar bir üçgen olduğunu gösteriniz.

2) Köşeleri $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$ ve $C(1, -3, 2)$ olan üçgenin bir dik üçgen olduğunu gösteriniz.

3) $A(-3, 4, 8)$ noktasına 12 birim uzaklıkta ve ox ekseni üzerinde olan noktayı bulunuz.

Cevap. $(5, 0, 0)$

4) $M(2, 1, -1)$ noktasından geçen ve normali $\vec{n} = (1, -2, 3)$ olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $x - 2y + 3z + 3 = 0$

5) $M_1(2, -1, 3)$ ve $M_2(3, 1. 2)$ noktalarından geçen ve $\vec{a} = (3, -1, -4)$ vektörüne paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $9x - y + 7z - 40 = 0$

6) $M(3, 4, -5)$ noktasından geçen ve $\vec{a} = (3, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$ vektörlerine paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $x + 4y + 7z + 16 = 0$

7) $A(3, -1, 2)$, $B(4, -1, -1)$ ve $C(2, 0, 2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $3x + 3y + z - 8 = 0$

8) Aşağıdaki denklem çiftlerinden hangilerinin paralel düzlemlere ait olduğunu bulunuz.

a) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$

b) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$

c) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$

Cevap. a ve c

9) Aşağıdaki denklem çiftlerinden hangilerinin. birbirine dik düzlemlere ait olduğunu bulunuz.

a) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$

b) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$

c) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$

Cevap. a ve b

10) Aşağıdaki denklem çiftlerinde l ve m i o şekilde belirtiniz ki bu denklem çiftleri birbirine paralel düzlemleri tanımlasınlar.

a) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$

b) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$

c) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$

Cevap. a) $l = 3$, $m = -4$; b) $l = 3$, $m = -\frac{2}{3}$;

c) $l = -\frac{10}{3}$, $m = -\frac{6}{5}$

11) Aşağıdaki denklem çiftlerinde m yi o suretle belirtiniz ki bu denklem çiftleri birbirine dik düzlemleri tanımlasınlar.

a) $3x - 5y + mz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$

b) $5x + y - 3z - 2 = 0$, $2x + my - 3z + 1 = 0$

c) $7x - 2y - z = 0$, $mx + y - 3z - 1 = 0$

Cevap. a) $m = 6$, b) $m = -19$, c) $m = -\frac{1}{7}$

12) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$ düzlemlerinin teşkil ettikleri dar açıyı bulunuz.

Cevap. $\frac{\pi}{3}$

13) Orijinden geçen ve $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$ düzlemlerine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $7x - y - 5z = 0$

14) $M(2, -1, 1)$ noktasından geçen ve $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$ düzlemlerine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $x + 2z - 4 = 0$

15) $A(1, -1, -2)$, $B(3, 1, 1)$ noktalarından geçen ve $x - 2y + 3z - 5 = 0$ düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $4x - y - 2z - 9 = 0$

16) $M(2, -3, 3)$ noktasından geçen ve xoy düzlemine paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $z - 3 = 0$

17) $M(-5, 2, -1)$ noktasından geçen ve yoz düzlemine paralel olan düz lemin denklemini bulunuz.

Cevap. $x + 5 = 0$

18) Aşağıdaki düzlem denklemlerinin normal şekildeki denklemlerini yazınız.

a) $2x - 2y + z - 18 = 0$

b) $3x - 4y - 1 = 0$

Cevap. a) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0$; b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5} = 0$

19) Aşağıdaki noktaların, hizalarında denklemleri verilmiş düzlemlere olan uzaklıklarını bulunuz.

a) $P(-2, -4, 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$

b) $P(2, -1, -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$

c) $P(1, 2, -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$

Cevap. a) $d = 3$; b) $d = 1$; c) $d = 0$

20) $P(2, -1, 1)$ noktası ile orijinin aşağıda denklemleri verilmiş düzlemlere göre aynı veya başka başka taraflarda olduğunu belirtiniz,

a) $5x - 3y + z - 18 = 0$, b) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$

c) $x + 5y + 12z - 1 = 0$, d) $2x - y + z + 11 = 0$

Cevap. a) aynı tarafta ; b) aynı tarafta ; c) başka başka tarafta
d) aynı tarafta.

21) Birbirine paralel $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$ düzlemleri arasındaki mesafeyi bulunuz.

Cevap. $d = 2$

22) $x + 2y - 2z - 2 = 0$ düzlemine $d = 4$ uzaklığında bulunan *oy* ekseni üzerindeki noktayı bulunuz.

Cevap. $(0, 7, 0)$ ve $(0, -5, 0)$

23) $(2x + y - z - 3 = 0$, $x + y + z - 1 = 0)$ doğrusunun koordinat düzlemlerinin deldiği noktaları bulunuz.

Cevap. $(2, -1, 0)$; $(\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3})$, $(0, 2, -1)$

24) $2x - 3y + z - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 1 = 0$ düzlemlerinin arakesitinden ve $M(1, -2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $2x + 15y + 7z + 7 = 0$

25) $3x - 2y + z - 3 = 0$ ve $x - 2z = 0$ düzlemlerinin arakesitinden geçen ve $x - 2y + z + 5 = 0$ düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$

26) $(2x + y - z + 1 = 0$, $x + y + 2z + 1 = 0)$ doğrusundan geçen ve $M_1(2, 5, -3)$, $M_2(3, -2, 2)$ noktalarını birleştiren doğru parçasına paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $9x + 7y + 8z + 7 = 0$

27) $M(2, 0, -3)$ noktasından geçen ve $\vec{a} = (2, -3, 5)$ vektörüne paralel doğrunun simetrik şekildeki denklemini yazınız.

Cevap. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$

28) $M(2, 0, -3)$ noktasından geçen ve $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ doğrusuna paralel olan doğrunun simetrik şekildeki denklemini yazınız.

Cevap. $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$

29) $M_1(1, -2, 1)$ $M_2(3, 1, -1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Cevap. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$

30) $M(1, -1, -3)$ noktasından geçen ye $\vec{a}=(2, -3, 4)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemlerini yazınız.

Cevap. $x=2t+1$, $y=-3t-1$, $z=4t-3$

31) $M(1, -1, -3)$ noktasından geçen ve parametrik denklemleri $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$ olan doğruya paralel olan doğrunun parametrik denklemlerini yazınız.

Cevap. $x=3t+1$, $y=-2t-1$, $z=5t-3$

32) $M_1(3, -1; 2)$, $M_2(2. 1, 1)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemlerini yazınız.

Cevap. $x=t+2$, $y=-2t+1$, $z=t+1$

33) $M_1(-6, 6, -5)$ ve $M_2(12, -6, 1)$ noktalarından geçen doğrunun koordinat düzlemlerini deldiği noktaları bulunuz.

Cevap. $(9, -4, 0)$; $(3, 0, -2)$; $(0, 2, -3)$

34) Bir üçgenin $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ ve $C(4, -7, -2)$ köşeleri veriliyor. C köşesinden çizilen kenar ortayın parametrik denklemlerini yazınız.

Cevap. $x=5t+4$, $y=-11t-7$, $z=-2$

35) $M(2, 3, -5)$ noktasından geçen ve $(3x-y+2z-7=0$, $x+3y-2z+3=0)$ doğrusuna paralel olan doğrunun simetrik şekildeki denklemini yazınız.

Cevap. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$

36) $(x-2y+3z-4=0$, $3x+2y-5z-4=0)$ doğrusunun simetrik şekildeki denklemini yazınız.

Cevap. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$

37) $(2x+3y-z-4=0 \quad , \quad 3x-5y+2z+1=0)$ doğrusunun parametrik denklemlerini yazınız.

Cevap. $x=t+1 \quad , \quad y=-7t \quad , \quad z=-19t-2$

38) Denklemleri $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ ve $(x+y-z=0 \quad , \quad x-y-5z-8=0)$ olan doğruların paralel olduklarını gösteriniz.

39) Denklemleri $x=2t+1 \quad , \quad y=3t-2 \quad , \quad z=-6t+1$ ve $(2x+y-4z+2=0 \quad , \quad 4x-y-5z+4=0)$ olan doğruların birbirine dik olduklarını gösteriniz.

40) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$

doğruları arasındaki dar açıyı hesaplayınız.

Cevap. 60^0

41) $(x-y-4z-5=0 \quad , \quad 2x+y-2z-4=0) \quad , \quad (x-6y-6z+2=0 \quad 2x+2y+9z-1=0)$ doğruları arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Cevap. $\cos\varphi=\pm\frac{4}{21}$

42) Parametrik denklemleri $x=3t-2 \quad , \quad y=-4t+1 \quad , \quad z=4t-5$ olan doğrunun $4x-3y-6z-5=0$ düzlemine paralel olduğunu gösteriniz.

43) $(5x-3y+2z-5=0 \quad , \quad 2x-y-z-1=0)$ doğrusunun $4x-3y+7z-7=0$ düzlemi üzerinde olduğunu gösteriniz.

44) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ doğrusunun $2x+3y+z-1=0$ düzlemini deldiği noktayı bulunuz.

Cevap. $(2, -3, 6)$

45) $M(2, -3, -5)$ noktasından geçen ve $6x-3y-5z+2=0$ düzlemine dik olan doğrunun denklemini yazınız.

Cevap. $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$

46) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ doğrusunun $x-3y+6z+7=0$ düzlemine paralel olabilmesi için m ne olmalıdır.

Cevap. $m=-3$

47) $(3x - 2y + z + 3 = 0 \;,\; 4x - 3y + 4z + 1 = 0)$ doğrusunun $2x - y + mz - 2 = 0$ düzlemine paralel olabilmesi için m ne olmalıdır.

Cevap. $m = -2$

48) Parametrik denklemleri

$$x = 3 + 4t \;,\; y = 1 - 4t \;,\; z = -3 + t$$

olan doğrunun $Ax + 2y - 4z + D = 0$ düzlemi üzerinde olabilmesi için A ve D ne olmalıdır.

Cevap. $A = 3 \;,\; D = -23$

49) m ve n hangi değerleri almalıdır ki

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$$

doğrusu $3x - 2y + nz + 1 = 0$ düzlemine dik olsun.

Cevap. $m = -6 \;,\; n = \frac{3}{2}$

50) xoy düzlemi üzerinde öyle bir P noktası bulunuz ki bu noktanın $A(-1, 2, 5)$ ve $B(11, -16, 10)$ noktalarına uzaklıkları toplamı minimum olsun.

Cevap. $P(+3, -4, 0)$

51) $P(1, -1, -2)$ noktasının $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$ doğrusuna uzaklığını hesaplayınız.

Cevap. $d = 7$

52) $P(2, 3, -1)$ noktasının $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$ doğrusuna uzaklığını hesaplayınız.

Cevap. $d = 21$

53) $P(2, 3, -1)$ noktasının $(2x - 2y + z + 3 = 0 \;,\; 3x - 2y + 2z + 17 = 0)$ doğrusuna uzaklığını hesaplayınız.

Cevap. $d = 15$

54) $(2x + 2y - z - 10 = 0 \;,\; x - y - z - 22 = 0)$ doğrusunun $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ doğrusuna paralel olduğunu gösteriniz ve bu iki doğru arasındaki d uzaklığını hesaplayınız.

Cevap. $d = 25$

55) $M(1, 2, -3)$ noktasından geçen ve

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3} \quad ; \quad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$$

doğrularına paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $9x+11y+5z-16=0$

56) $M(2, -2, 1)$ noktasından ve

$$x=2t+1 \quad , \quad y=-3t+2 \quad , \quad z=2t-3$$

doğrusundan geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $4x+6y+5z-1=0$

57) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2} \quad ; \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$

doğrularından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Cevap. $6x-20y-11z+1=0$

58) $C(3, -4, -2)$ noktasının,

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4} \quad ; \quad \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$$

doğrularından geçen düzlem üzerindeki izdüşümünü bulunuz.

Cevap. $(2, -3, -5)$

59) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2} \quad ; \quad \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$

doğruları arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

Cevap. $d=13$

60) Parametrik denklemleri

$$x=2t-4 \quad , \quad y=-t+4 \quad , \quad z=-2t-1$$

$$x=4t-5 \quad , \quad y=-3t+5 \quad , \quad z=-5t+5$$

olan doğrular arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

Cevap. $d=3$

61)
$$\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

$$x=6t+9 \quad , \quad y=-2t \quad , \quad z=-t+2$$

doğruları arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

Cevap. $d=7$

62) $$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1} \quad ; \quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$$

doğruları arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

Cevap. $d=\frac{17\sqrt{3}}{5}$

63) $(x+y+2z-1=0 \; ; \; x-2y-z-1=0)$, $(2x-y+z-3=0$ $x+y+z-1=0)$ doğruları arasındaki en kısa mesafeyi bulunuz.

Cevar. $d=\frac{\sqrt{6}}{6}$

YÜZEYLER :

64) Orijinden geçen ve merkezi $M(4, -4, -2)$ noktasında bulunan küreznin denklemini bulunuz.

Cevap. $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$

65) $A(2, -1, -3)$ noktasından geçen ve merkezi $M(3. -2, 1)$ noktasında bulunan kürenin denklemini bulunuz.

Cevap. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$

66) Merkezi $M(3, -5, -2)$ de bulunan ve $2x-y-3z+11=0$ düzlemine teğet olan kürenin denklemini bulunuz.

Cevap. $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$

67) $x+2y+2z+3=0$ düzlemine $P(1, 1, -3)$ noktasında teğet olan $r=3$ yarıçaplı kürenin denklemini bulunuz.

Cevap. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$

68) Merkezi $(2x+4y-z-7=0$, $4x+5y+z-14=0)$ doğrusu üzerinde olan ve $x+2y-2z-2=0$, $x+2y-2z+4=0$ düzlemlerine teğet olan kürenin denklemini bulunuz.

Cevap. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=4$

69) $A(-2, 6, -3)$ noktasının $x^2+y^2+z^2=4$ küresine en kısa mesafesini bulunuz.

Cevap. 5

70) a ne olmalıdır ki $x+y+z=a$ düzlemi $x^2+y^2+z^2=12$ küresine teğet olsun.

Cevap. $a=\pm 6$

71) $x-2=0$ düzleminin $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ elipsoidi ile arakesitinin bir elips olduğunu gösteriniz ve bu elipsin yarı eksen uzunluklarını ve köşelerini bulunuz.

Cevap. 3 , $\sqrt{3}$, (2 ,3, 0) ; (2, —3, 0) ; (2, 0, $\sqrt{3}$) ; (2, 0, $-\sqrt{3}$)

72) $y+6=0$ düzlemi ile $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ hiperbolik paraboloidinin ara kesitinin bir parabol olduğunu gösteriniz ve bu parabolun tepe noktasını belirtiniz.

Cevap. $(0, -6, -\frac{3}{2})$

73) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ elipsoidi ile $4x-3y+12z-54=0$ düzleminin ortak bir noktası olduğunu gösteriniz ve bu noktayı bulunuz.

Cevap. (6, —2. +2)

74) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=2z$ yüzeyi ile $3x-y+6z-14=0$ düzleminin arakesit eğrisini bulunuz.

Cevap. Merkezi (—1, 1, 3) olan bir elips.

75) m ne olmalıdır. ki $x+mz-1=0$ düzlemi $x^2+y^2-z^2=-1$ yüzeyini bir elips boyunca kessin.

Cevap. $1<|m|<\sqrt{2}$

20. BÖLÜM

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

20.1 Tanım

Bir u değişkeninin değerleri $x, y, z, \ldots$ değişkenlerinin değerlerine bağlı olarak belirtiliyorsa u değişkeni, $x, y, z, \ldots$ değişkenlerinin fonksiyonudur denir ve işaretle

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

şeklinde gösterilir. Bu takdirde u, çok değişkenli fonksiyondur. Değişken sayısı iki olursa iki değişkenli fonksiyon; üç olursa, üç değişkenli fonksiyon elde edilir.

Örneğin bir dik koninin hacmı

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = f(r, h)$$

olup taban yarıçapı ve yüksekliğinin fonksiyonudur.

Bir elektrik devresinin verdiği ısı miktarı

$$Q = R i^2 t = f(R , i , t)$$

olup devrenin direnci, akım ve zamanın bir fonksiyonudur.

İdeal bir gazın v hacmı, p basıncı ve T mutlak sıcaklığı arasında

$$p v = n R T$$

bağıntısı vardır. Buradan

$$p = n R \frac{T}{v} \quad , \quad v = n R \frac{T}{p} \quad , \quad T = \frac{1}{n R} p v$$

yazılarak p , v , T den herbirinin diğer ikisinin fonksiyonu olduğu görülür.

Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, çok değişkenli fonksiyonlar da, $z = f(x , y)$ şeklinde açık olarak ifade edilebileceği gibi, $F(x , y , z) = 0$ şeklinde kapalı olarak ta gösterilebilir.

$z = f(x , y)$ şeklindeki iki değişkenli bir fonksiyonda x , y ler birbirine bağlı olmayan bir değişken çiftini gösterecektir. Böyle bir değişken çifti, özel olarak, düzlemin kartezyen koordinatları x , y olan bir P noktası ile geometrik olarak temsil edilir. İki değişkenin aynı zamanda değişmesi, bu noktanın düzlem içinde yer değiştirmesi ile gösterilir. P noktasının, düzlemin kapalı bir c eğrisi ile sınırlanmış belirli bir D parçası içine düşmesini sağlıyan x , y ye bütün değer çiftleri verilirse, bu takdirde, x , y değer çifti veya (x , y) noktası, sınırlanmış D *bölgesinde (domeninde)* değişiyor denir.

Örneğin x , y değer çifti $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2$ eşitsizliğini sağlıyan değerleri alıyorsa, bu takdirde $P(x , y)$ noktası, merkezi (a , b) ve yarıçapı r olan bir dairede dolaşıyor denir.

x , y değer çifti, $a_1 < x < a_2$; $b_1 < y < b_2$, eşitsizliklerini sağlıyan değerler alarak değişiyorsa $P(x , y)$ noktası köşeleri (a_1 , b_1) , (a_2 , b_1) , (a_1 , b_2) , (a_2 , b_2) olan bir dik dörtgende yer değiştirir.

x , y , z gibi üç değişkenin değişmesi de uzaydaki bir $P(x , y , z)$ noktasının yer değiştirmesi ile temsil edilir. Eğer bu nokta, bir S yüzeyi ile sınırlanmış bir D hacminde bütün durumları alabilirse (x , y , z) noktası D domeninde değişiyor denir. Üçten fazla değişken için geometrik temsil mevcut değildir.

İşte bu bölgeler, iki veya üç değişkenli olarak verilen fonksiyonların *tanım bölgesi* veya *tanım domeni* olarak tanımlanır. Domeni çevreliyen eğriye *domenin çevresi* veya *sınır eğrisi* denir. Domenin, çevresi üzerindeki noktaları hariç diğer noktalarına *iç noktalar* denir. Domen yalnız iç noktalardan meydana gelmişse *açık domen;* çevresine ait noktaları da içeriyorsa *kapalı domen* adını alır.

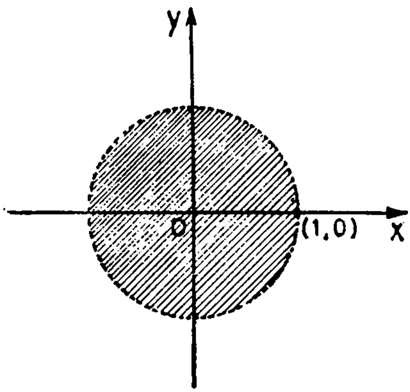
$(x, y, ...)$ noktası bir D domeninde değiştiği zaman $f(x, y, ...)$ fonksiyonu sınırlanmış ise, bu fonksiyon D domeninde sınırlanmıştır denir.

ÖRNEK 1. $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

Fonksiyon ancak

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \quad \text{yani} \quad x^2 + y^2 < 1$$

olduğu zaman tanımlı olur. O halde tanım bölgesi, Şekil 202 de gösterilen 1 yarıçaplı dairenin içidir.



Şekil 202

ÖRNEK 2.

$$F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \log(4 - x^2 - y^2)$$

fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

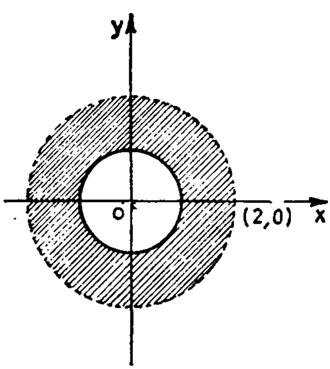
Birinci terimin yani kare kökün reel olabilmesi için

$$x^2 + y^2 - 1 \geqq 0 \quad \text{veya} \quad x^2 + y^2 \geqq 1$$

olmalıdır. Logaritmanın tanımlı olabilmesi için

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \quad \text{veya} \quad x^2 + y^2 < 4$$

olmalıdır. O halde $F(x, y)$ fonksiyonunun tanım bölgesi



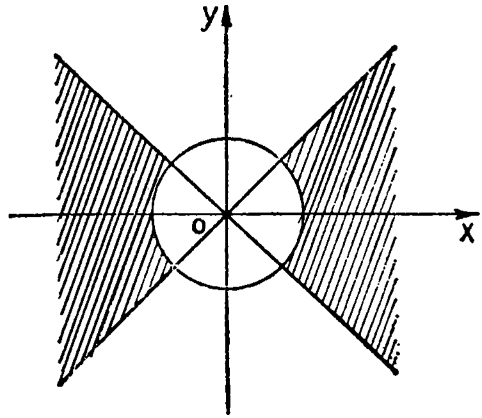
Şekil 203

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ve} \quad x^2 + y^2 = 4$$

dairelerinin arasındaki halkadır. Şekil 203.

ÖRNEK 3. $G(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

Aranılan tanım bölgesi $x^2 \geqq y^2$; $x^2 + y^2 \geqq 1$ eşitsizliklerini sağlıyan bölgedir. $x - y = 0$, $x + y = 0$ doğruları düzlemi dört bölgeye ayırır. $x^2 \geqq y^2$ eşitsizliği bu dört bölgenin ikisinde sağlanır. Bu bölgeler x eksenini içeren bölgelerdir. Şekil 204. $x^2 + y^2 \geqq 1$ eşitsizliği ise $x^2 + y^2 = 1$ dairesinin dışındaki noktalarda sağlanır. Böylece, $G(x, y)$ fonksiyonun tanım bölgesi Şekil 204 de taralı olarak gösterilen bölgedir.



Şekil 204

20.2 Limit ve süreklilik

20.2 - 1. Limit.

Birbirine bağlı olmayarak $x \to a, y \to b$ olması demek, değişken (x, y) noktasının herhangi bir yoldan, gittikçe (a, b) noktasına yaklaşması demektir. Bu olayı

$$(x, y) \to (a, b) \quad \text{veya} \quad \lim(x, y) = (a, b)$$

şeklinde göstereceğiz ve (x, y) değişken çiftinin ***iki kat limiti*** olarak adlandıracağız. Burada gerek ve yeter olan şart

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \to 0$$

olmasıdır. Bu şart $x - a \to 0$, $y - b \to 0$ ile de ifade edilebilir.

Buna göre x, y gibi iki değişkenli $z = f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasındaki c limit değerinden şunu anlayacağız.

İstenildiği kadar küçük bir ε *pozitif sayısı seçildikten sonra*

$$|x - a| < \delta \quad \text{ve} \quad |y - b| < \delta$$

olduğu zaman

$$|f(x, y) - c| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ *sayısı mevcut ise*

$$(x, y) \to (a, b) \quad \text{için} \quad f(x, y) \to c$$

veya

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = c$$

dir.

TEOREM. $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ *fonksiyonları* (xoy) *düzleminin bir* D *domeninde tanımlı olsunlar. Eğer*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = c \quad , \quad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} g(x, y) = d$$

ise

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} [f(x, y) + g(x, y)] = c + d$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) \cdot g(x, y) = c\,d \quad ;$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{c}{d} \qquad (d \neq 0)$$

dir.

ÖRNEK 1. $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 3}} \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{11}$$

ÖRNEK 2. $$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ y \to 1}} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{4}{8 + \pi^2}$$

20.2 - 2. Süreklilik.

$M(a, b)$ noktası $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım domeninde olan bir nokta olsun. Eğer

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$$

ise $f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasında süreklidir denir.

Yukarıdaki eşitlikte $x = a + \Delta x$, $y = b + \Delta y$ yapılırsa bu eşitlik

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

veya

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(a + \Delta x , b + \Delta y) - f(a, b)] = 0$$

şeklini alır. Burada köşeli parantez içindeki ifade $z = f(x, y)$ fonksiyonunun bir artımı olup Δz ile gösterilebilir. O halde $z = f(x, y)$ *fonksiyonu sürekli ise*

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

dir.

Bir domenin her noktasında sürekli olan bir fonksiyonun, bu domende sürekli olduğu kolayca söylenebilir.

ÖRNEK. $z = x^2 + y^2$ fonksiyonunun x ve y nin bütün değerleri için yani xoy düzleminin her noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

$x, y, \Delta x, \Delta y$ sayıları ne olursa olsunlar

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - (x^2 + y^2)$$

$$\Delta z = 2x \,.\, \Delta x + 2y \,.\, \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$

olup

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

olarak fonksiyonun xoy düzleminin her noktasında sürekli olduğu gösterilmiş olur.

20.3 Kısmi türevler

20.3 - 1. Kısmî türev tanımı.

$u = f(x, y, z, \ldots)$ verilmiş bir D domeninde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonda değişkenlerden biri değiştirilir, diğerleri sabit tutulursa, u yalnız bir değişkenin sürekli bir fonksiyonu olur. Eğer bu fonksiyonun bu değişkene göre bir türevi mevcut ise, bu türeve u *fonksiyonunun gözönüne alınan değişkene göre kısmi türevi* denir. Buna göre, değişken sayısında kısmi türevler elde edilebilir.

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun x e göre kısmi türevi

$$z'_x \quad , \quad f'_x(x, y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

sembollerinden biri vasıtası ile gösterilir. Bu türev tanım olarak

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}}$$

dir.

Aynı şekilde, $z = f(x, y)$ fonksiyonunun y ye göre kısmi türevi de, $\Delta_y z$ kısmi artımının Δy ye oranının, Δy nin sıfıra yaklaşması halindeki limiti olarak tanımlanır. y ye göre kısmi türevler de

$$z'_y \quad , \quad f'_y(x, y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

sembollerinden biri vasıtası ile gösterilir. Böylece

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}$$

dir.

ÖRNEK 1. $z = x\, e^{x^2 y}$ ise

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y}(2x^2 y + 1) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 e^{x^2 y}$$

dir.

ÖRNEK 2. $f(x, y, z) = y\, e^{x^2} + x \log(y^2 - z^2) + \operatorname{arctg} 3z^2$ den

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\, e^{x^2} + \log(y^2 - z^2) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2} + \frac{2xy}{y^2 - z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2xz}{y^2 - z^2} + \frac{6z}{1 + 9z^4}$$

dir.

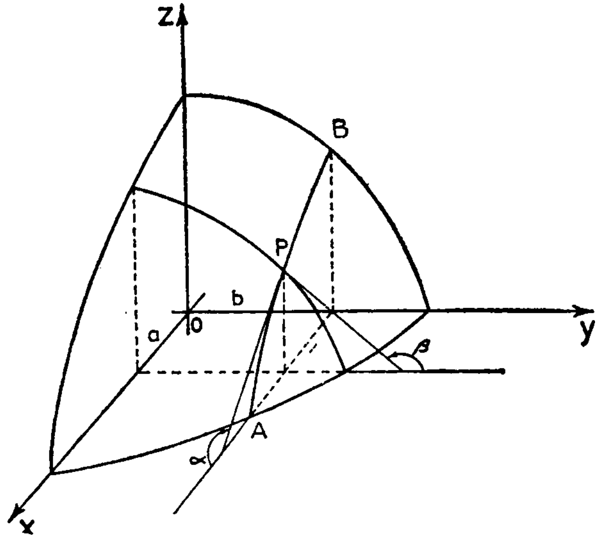
20.3 - 2. Kısmî türevin geometrik anlamı.

$z = f(x, y)$ denkleminin, uzayda bir S yüzeyini gösterdiğini biliyoruz. $P(x,y,z)$ noktası, bu yüzey üzerindeki bir nokta olsun. P noktasından zox düzlemine paralel bir düzlem çizelim. Bu düzlem üzerindeki noktalar için $y = b = st.$ dir. Bu düzlemin S yüzeyi ile arakesiti , denklemi

$$z = f(x, b)$$

olan bir APB eğrisidir. Şekil 205.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ kısmî türevi APB eğrisinin P noktasındaki teğetinin eğimidir. Buna göre



Şekil 205

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha = f(x,\, b)$ eğrisinin P deki eğimi

Aynı şekilde $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ de, S yüzeyinin P den yoz düzlemine paralel çizilen düzlemle arakesit eğrisinin P noktasındaki eğimidir. Buna göre, düzlemin denklemi $x = a$ ise

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta = f(a,\, y)$ eğrisinin P deki eğimi

dir.

20.3 - 3. Yüksek mertebeden kısmi türevler.

$z = f(x\,,y)$ fonksiyonundan elde edilen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevleri de $x\,,y$ nin fonksiyonlarıdır. Bu nedenle, bunların da x veya y ye göre tekrar türevleri hesaplanabilir ve elde edilenler için aynı işlemler tekrarlanabilir. Örneğin $z = f(x\,,y)$ için

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

ikinci mertebeden kısmi türevleri yazılabilir. Bunlardan hareket edilerek de aşağıdaki üçüncü mertebeden kısmi türevler elde edilebilir.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x\,\partial y}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

ÖRNEK 1. $z = 3x^2y - x\sin xy$ *için* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ yi hesaplayınız.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - x^2\cos xy$$

olup

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 6x - 2x\cos xy + x^2 y\sin xy$$

dir.

ÖRNEK 2. $u = e^x \sin y + e^y \sin z$ için $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y \qquad ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + e^y \sin z \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin y + e^y \sin z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^y \cos z \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - e^y \sin z$$

olup

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^x \sin y - e^x \sin y + e^y \sin z - e^y \sin z = 0$$

bulunur.

TEOREM. $z = f(x, y)$ *fonksiyonu ve bu fonksiyonun*

$$f'_x \, , \, f'_y \, , \, f''_{xy} \, , \, f''_{yx}$$

kısmi türevleri bir $M(x\,;y)$ *noktasında tanımlı ve sürekli iseler bu nokta için*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}} \qquad (f''_{xy} = f''_{yx})$$

dir; yani yüksek mertebeden kısmi türev almada sonuç, türev alma sırasına bağlı değildir. (Schwarz teoremi)

İspat : $z = f(x, y)$ fonksiyonunda y sabit kalsın ve x bir Δx artımı alsın. Buna göre

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

dir. Şimdi de x ve Δx i sabit tutup y ye bir Δy artımı verelim. Bu takdirde

$$\Delta^2 z = [f(x + \Delta x, \, y + \Delta y) - f(x, \, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, \, y) - f(x, y)]$$

elde edilir. İkinci tarafın herbir farkına sonlu artımlar formülünü uygularsak

$$\Delta^2 z = \Delta x \, f'_x(x + \theta_1 \, \Delta x \, , \, y + \Delta y) - \Delta x \, f'_x(x + \theta_1 \, \Delta x \, , \, y)$$

ve bu farka da bir daha sonlu artımlar formülünü uygularsak

$$\Delta^2 z = \Delta x \, \Delta y \, f''_{yx}(x + \theta_1 \, \Delta x \, , \, y + \theta_2 \, \Delta y) \tag{1}$$

$$0 < \theta_1 < 1 \quad , \quad 0 < \theta_2 < 1$$

elde edilir.

Şimdi de aynı işi ters sırada yapalım. Bu takdirde

$$\Delta^2 z = [f(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y)] - [f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)]$$

$$\Delta^2 z = \Delta x\, \Delta y\, f''_{xy}(x + \theta_3\, \Delta x\ ,\ y + \theta_4\, \Delta y) \tag{2}$$

$$0 < \theta_3 < 1\quad ,\quad 0 < \theta_4 < 1$$

elde edilir.

(1) ve (2) bağıntılarının birinci tarafları birbirine eşit olup ikinci tarafları birbirine eşitlenirse

$$\Delta x\, \Delta y\, f''_{yx}(x + \theta_1\, \Delta x\ ,\ y + \theta_2\, \Delta y) = \Delta x\, \Delta y\, f''_{xy}(x + \theta_3\, \Delta x\ ,\ y + \theta_4\, \Delta y)$$

$$f''_{yx}(x + \theta_1\, \Delta x\ ,\ y + \theta_2\, \Delta y) = f''_{xy}(x + \theta_3\, \Delta x\ ,\ y + \theta_4\, \Delta y)$$

ve $\Delta x \to 0\ ,\ \Delta y \to 0$ halinde

$$f''_{yx}(x,\ y) = f''_{xy}(x,\ y) \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

elde edilir.

ÖRNEK 3. $z = \sin(2x + 3y)$ için $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x + 3y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x + 3y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -6\sin(2x + 3y) \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -6\sin(2x + 3y)$$

olarak

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

dir.

ÖRNEK 4. $u = e^{xy} \sin z$ için $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$ ve $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x}$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\,e^{xy}\sin z \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = y\,e^{xy}\cos z \quad ; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x} = e^{xy}(1+xy)\cos z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{xy}\cos z \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = x\,e^{xy}\cos z \quad ; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xy}(1+xy)\cos z$$

bulunur. Bu sonuçlardan

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x}$$

olduğu kolayca görülür.

20.4 Bileşik fonksiyonların türevleri

20.4 - 1. Bileşik fonksiyon tanımı.

$z = f(x,y)$ fonksiyonundaki x ve y , $x = x(t)$, $y = y(t)$ şeklinde t gibi bir değişkenin fonksiyonları iseler $z = f(x,y)$ ye *bileşik fonksiyon* denir. Bu halde

$$z = f(x,y) = f\,[x(t)\ ,\ y(t)] = F(t)$$

dir. Örneğin

$$z = e^x \sin y \ , \quad x = \log t \ , \quad y = t^2$$

ise z fonksiyonu bir bileşik fonksiyondur.

Aynı şekilde $z = f(x,y)$ fonksiyonundaki x ve y,

$$x = x(s,t) \ , \ y = y(s,t)$$

şeklinde s ve t gibi diğer iki değişkenin fonksiyonları iseler $z = f(x,y)$ ye iki değişkenli bileşik fonksiyon denir. Bu halde

$$z = f(x,y) = f[x(s,t)\ ;\ y(s,t)] = F(s,t)$$

dir. Örneğin

$$z = e^{y/x} \quad , \quad x = s \cos t \quad , \quad y = s \sin t$$

ise z iki değişkenli bir bileşik fonksiyondur.

20.4 - 2. Bileşik fonksiyonların türevleri.

$x = x(t)$, $y = y(t)$ olarak $z = f(x, y)$ bileşik fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun $\frac{dz}{dt}$ türevini hesaplamak isteyelim. x ve y nin t cinsinden değerlerini z ifadesinde yerine koymak suretile çözüm, herzaman pratik bir yol olmaz. Bu nedenle $\frac{dz}{dt}$ türevini, başka bir yoldan hesaplayacağız.

t bir Δt artımı alırsa x ve y , Δx , Δy ve z de Δz artımlarını alır. Buna göre

$$\Delta z = f(x + \Delta x \, , y + \Delta y) - f(x \, , y)$$

olup ikinci tarafa $f(x \, , y + \Delta y)$ ifadesini ilave eder ve çıkarırsak

$$\Delta z = [f(x + \Delta x \, , \, y + \Delta y) - f(x, \, y + \Delta y)] + [f(x, \, y + \Delta y) - f(x, \, y)]$$

elde edilir. Şimdi de ikinci tarafın herbir farkına sonlu artımlar formülünü uygulayalım. Bu takdirde

$$\Delta z = \Delta x \, f'_x(x + \theta_1 \Delta x \, , \, y + \Delta y) + \Delta y \, f'_y(x, \, y + \theta_2 \Delta y)$$

bulunur. Her iki tarafı Δt ile oranlıyalım ve $\Delta t \to 0$ halinde limiti arayalım. Buna göre

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x + \theta_1 \Delta x \, , \, y + \Delta y) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, \, y + \theta_2 \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[f'_x(x + \theta_1 \Delta x \, , \, y + \Delta y) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right.$$

$$\left. + f_y'(x, \, y + \theta_2 \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t} \right]$$

ve buradan da

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y) \frac{dy}{dt}$$

veya

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}}$$

bulunur.

Fonksiyon, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ olarak $u = f(x, y, z)$ şeklinde ise türev formülü

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}}$$

şekline girer.

Eğer fonksiyon $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ olarak $u = f(x, y)$ şeklinde iki bağımsız değişkene bağlı ise $\frac{du}{dt}$ türevi yerine $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$ kısmi türevlerinin hesabı bahis konusu olur. Bunlar da $\frac{du}{dt}$ ifadelerinde, x ve y ler de iki değişkenli fonksiyonlar olduğundan, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ler yerine $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ veya $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ kısmî türevlerini koymak suretile elde edilir. Bunlara göre

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}} \quad ; \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}}$$

dir.

ÖRNEK 1. $z = e^x \sin y$, $x = \log t$, $y = t^2$ den $\frac{dz}{dt}$ yi hesaplayınız.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

olup

$$\frac{dz}{dt} = e^x \left(\frac{1}{t} \sin y + 2t \cos y \right)$$

dir.

ÖRNEK 2. $z = e^{xy}$, $x = \sqrt{t^2 + s^2}$, $y = \operatorname{arctg} \frac{s}{t}$ den $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ türevlerini hesaplayınız.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \ e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \ e^{xy}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + s^2}} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{s}{t^2 + s^2}$$

olup

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{xy} \left[\frac{t \ y}{\sqrt{t^2 + s^2}} - \frac{s \ x}{t^2 + s^2} \right] = e^{xy} \frac{t \ y - s}{x}$$

dir.

20.5 Toplam diferansiel ve uygulamaları

20.5 - 1. Toplam diferansiel.

İki değişkenli $u = f(x, y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevlerinin mevcut ve sürekli olduklarını kabul edelim. Bu şartlar altında $u = f(x, y)$ fonksiyonunun *toplam diferansieli* diye herbir bağımsız değişkene göre alınmış kısmi diferansiellerin toplamına denir ve du ile gösterilir. Buna göre

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

dir.

Toplam diferansieli diğer bir şekilde tanımlamak üzere, $u = f(x, y)$ fonksiyonunda x e Δx, y ye Δy artımlarını verelim. Bu takdirde fonksiyonun toplam artımı

$$\Delta u = f(x + \Delta x\ , y + \Delta y) - f(x, y)$$

olur. Bu bağıntının ikinci tarafına $f(x, y + \Delta y)$ yi ilave edip çıkaralım. Bu halde

$$\Delta u = [f(x + \Delta x\ , y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x,y)]$$

elde edilir. Bileşik fonksiyonların türevlerinin hesabında yapıldığı gibi, ikinci tarafın herbir farkına sonlu artımlar formülünü uygularsak

$$\Delta u = f'_x(x + \theta_1 \Delta x\ , y + \Delta y)\, \Delta x + f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\, \Delta y$$

elde edilir. Buradaki θ_1 ve θ_2 ler 0 ile 1 arasında değerler alır. Hipoteze göre f'_x, f'_y kısmi türevleri sürekli kabul edildiklerinden

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x\ , y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1 \quad ; \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = 0$$

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \varepsilon_2 \quad ; \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2 = 0$$

yazılabilir. Buna göre

$$\Delta u = [f'_x(x, y) + \varepsilon_1]\, \Delta x + [f'_y(x, y) + \varepsilon_2]\, \Delta y$$

veya

$$\boxed{\Delta u = f'_x(x, y)\, \Delta x + f'_y(x, y)\, \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}$$

olur. Δx ve Δy sıfıra yaklaştıklarından birer sonsuz küçük olup Δu da sonsuz küçüktür. Bu şekilde elde edilen Δu sonsuz küçüğünün asal kısmı olan

$$f'_x(x, y)\, \Delta x + f'_y(x, y)\, \Delta y$$

ye $u = f(x, y)$ fonksiyonunun *toplam diferansieli* denir. Burada $\Delta x = dx$ ve $\Delta y = dy$ olduğu gözönünde tutulursa $f(x, y)$ fonksiyonunun toplam diferansieli

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

şeklinde elde edilmiş olur. Buradan da görülüyor ki *toplam diferansiel, herbir bağımsız değişkene göre alınmış kısmî diferansiellerin toplamına eşittir.*

Fonksiyon ikiden fazla değişkenli ve örneğin $u = f(x, y, z)$ şeklinde verilmiş ise toplam diferansiel

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

dir.

ÖRNEK 1. $z = \log(x^2 + y^2)$ den dz diferansielini bulunuz.

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}\, dy = \frac{2x\, dx + 2y\, dy}{x^2 + y^2}$$

ÖRNEK 2. $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ den du diferansielini bulunuz.

$$du = \frac{\frac{y}{z}}{1 + \frac{x^2 y^2}{z^2}}\, dx + \frac{\frac{x}{z}}{1 + \frac{x^2 y^2}{z^2}}\, dy + \frac{\frac{-xy}{z^2}}{1 + \frac{x^2 y^2}{z^2}}\, dz$$

$$du = \frac{yz\, dx + zx\, dy - xy\, dz}{z^2 + x^2 y^2}$$

20.5 - 2. Tam diferansiel olma şartı.

$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ şeklindeki her toplam diferansielin $u = f(x, y)$ şeklindeki bir fonksiyonun toplam diferansieli olduğu iddia edilemez. $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ toplam diferansieli eğer $u = f(x, y)$ şeklindeki bir fonksiyonun toplam diferansieli ise, *tam diferansiel* 'dir denir. Şimdi böyle bir toplam diferansielin tam diferansiel

olma şartını araştıralım.

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ toplam diferansieli $u = f(x,y)$ gibi bir fonksiyonun toplam diferansieli ise gözönüne alınan domenin her noktasında

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

yani

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

olmalıdır. $f(x,y)$ fonksiyonu bilinmediğine göre bu şartın var olup olmadığını anlamak için $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ türevlerini hesaplıyalım. Buna göre

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

elde edilir. Bu bağıntıların ikinci tarafları eşit olduğuna göre birinci taraflarının eşitlenmesinden

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

elde edilir.

O halde $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ toplam diferansielinin bir tam diferansiel, yani $u = f(x,y)$ şeklinde bir fonksiyonun toplam diferansieli olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

olmasıdır.

ÖRNEK 1. $\cos y\,dx + (2y - x\sin y)\,dy$ ifadesinin bir tam diferansiel olduğunu gösteriniz.

$$M(x,y) = \cos y \quad , \quad N(x,y) = 2y - x\sin y$$

olup

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin y$$

olarak

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

dir.

ÖRNEK 2. $x^2 \sin y \, dx + x^2 \cos y \, dy$ toplam diferansielinin bir tam diferansiel olup olmadığını belirtiniz.

$$M(x, y) = x^2 \sin y \quad , \quad N(x, y) = x^2 \cos y$$

ve

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 \cos y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cos y$$

olarak

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

dir. O halde verilen toplam diferansiel bir tam diferansiel değildir.

20.5 - 3. Yüksek mertebeden toplam diferansieller.

$u = f(x, y)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun muhtelif mertebeden toplam diferansiellerini hesaplamak isteyelim. Birinci mertebeden diferansiel

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

dir. Buradaki dx , dy ler birer sabittir. O halde bu ifadeden bir daha diferansiel alırsak

$$d^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2$$

elde edilir. Aynı şekilde diferansiel almağa devam edersek

$$d^3f = dx^2\, d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2\, dx\, dy\, d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right) + dy^2\, d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= dx^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\, dx + \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}\, dy\right) + 2\, dx\, dy\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}\, dx + \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}\, dy\right)$$

$$+ dy^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}\, dx + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\, dy\right)$$

olup Schwarz teoremi gözönüne alınırsa (Bak. 20.3-3. *TEOREM)*

$$d^3f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\, dx^3 + 3\, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}\, dx^2\, dy + 3\, \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}\, dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\, dy^3$$

bulunur. Elde edilen bu ifadelerdeki katsayılar ve türevlerin mertebelerinin Binom açılımına ait kurala uyduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle değişik mertebeden diferansieller

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right) f$$

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(2)} f$$

$$d^3f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(3)} f$$

. . . .

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(n)} f$$

şeklinde sembolik olarak gösterilebilir.

ÖRNEK. $z = 2x^2 - 3xy - y^2$ olduğuna göre d^2z i hesaplayınız.

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^{(2)} z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

olup

$$d^2z = 4\,dx^2 - 6\,dx\,dy - 2\,dy^2$$

dir.

20.5 - 4. Toplam diferansielin yaklaşık hesaba uygulanması.

Fonksiyonların artımlarının değerleri, yaklaşık olarak, diferansieller yardımiyle hesaplanabilir. Bir $u = f(x, y)$ fonksiyonu için, çok defa, Δu ile du arasındaki fark, ihmal edilebilecek kadar küçüktür. Gerçekten $u = f(x, y)$ fonksiyonu için

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y$$

olup

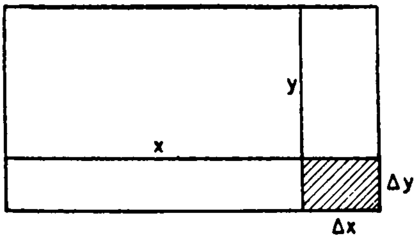
$$\boxed{\Delta u - du = \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y}$$

dır. İkinci taraf Δu ve du dan daha yüksek mertebeden sonsuz küçük olup ihmal edilebilir. Bu takdirde

$$\Delta u \cong du$$

olarak Δu artımı yerine du diferansieli alınabilir.

Örneğin, kenarları x, y olan bir dik dörtgenin alanının, $\Delta x, \Delta y$ artımlarına karşılık olan toplam artımı (Şekil 206)



Şekil 206

$$\Delta A = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - x\,y$$

$$\Delta A = y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x\,\Delta y$$

dır. Halbuki

$$\mathrm{d}A = y\,\Delta x + x\,\Delta y$$

olarak

$$\Delta A - \mathrm{d}A = \Delta x\,\Delta y$$

kadardır. x ile y nin artımları çok küçük olduğu takdirde $\Delta x\,\Delta y$ çarpımı ihmal edilebilecek bir değerde olabilir. Şekil 206 daki taralı dik dörtgen ihmal edilen değeri gösterir.

ÖRNEK 1. $z = 3x^2 + 2y^2$ ise $x = 2$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}02$ için $\mathrm{d}z$ ve Δz i hesaplayınız.

$$\Delta z = 3(x + \Delta x)^2 + 2(y + \Delta y)^2 - (3x^2 + 2y^2)$$

$$= 6x\,\Delta x + 4y\,\Delta y + 3\,\Delta x^2 + 2\,\Delta y^2$$

$$= 6\,.\,2\,.\,0{,}01 + 4\,.\,3\,.\,0{,}02 + 3\,.\,(0{,}01)^2 + 2\,.\,(0{,}02)^2$$

$$= 0{,}12 + 0{,}24 + 0{,}0003 + 0{,}0008$$

$$= 0{,}3611$$

$$\mathrm{d}z = 6x\,\Delta x + 4y\,\Delta y$$

$$= 6\,.\,2\,.\,0{,}01 + 4\,.\,3\,.\,0{,}02$$

$$= 0{,}36$$

$$\Delta z - \mathrm{d}z = 0{,}0011$$

ÖRNEK 2. $\sqrt{(2{,}97)^2 + (2{,}05)^4}$ ün değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$u = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4} \quad \text{ve} \quad x = 3 \quad , \quad y = 2$$

alınırsa

$$f(3, 2) = u = \sqrt{9 + 16} = 5$$

bulunur. Aranılan değer ise

$$f(2{,}97 \; ; \; 2{,}05)$$

olup

$$f(2{,}97 \; ; \; 2{,}05) = f(3 + \Delta x \, , \, 2 + \Delta y) = f(3, 2) + \Delta u$$

dir. $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}05$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\Delta u \sim du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}} \Delta x + \frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}} \Delta y$$

$$= \frac{x \cdot \Delta x + 2y^3 \, \Delta y}{\sqrt{x^2 + y^4}} = \frac{3 \, . \, (-0{,}03) + 2 \, . \, 2^3 \, . \, 0{,}05}{5}$$

$$= \frac{-0{,}09 + 0{,}80}{5} = 0{,}142$$

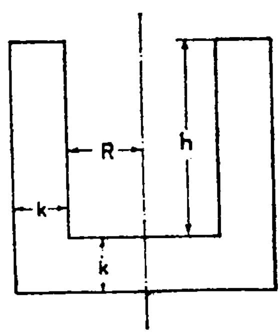
bulunur ve yukarıdaki ifadede yerine konursa

$$f(2{,}97 \, ; \, 2{,}05) = \sqrt{(2{,}97)^2 + (2{,}05)^4} = f(3, 2) + \Delta u$$

$$= 5 + 0{,}142 = 5{,}142$$

elde edilir.

ÖRNEK 3. Şekil 207 de kesiti görülen silindirin yapılabilmesi için kullanılacak gerekli malzemenin hacmını hesaplayınız.



Şekil 207

Problemin çözümünü iki yoldan vereceğiz.

1. *yol.* Birinci olarak tam olan çözümü hesaplayacağız.

$$V = \pi (R + k)^2 \, (h + k) - \pi R^2 h$$

$$V = \pi(2\,R\,h\,k + R^2 k + h\,k^2 + 2\,R\,k^2 + k^3)$$

2. *yol.* Yaklaşık çözüm.

İç kısmın hacmı

$$f = \pi\,R^2\,h$$

dır. f, R ve h ın fonksiyonudur. R ve h ye k artımı verilince f de Δf artımı alır ki bu aranan hacmı verir.

$$V = \Delta f \sim df$$

olarak

$$V \cong \frac{\partial f}{\partial R}\,\Delta R + \frac{\partial f}{\partial h}\,\Delta h = 2\,\pi\,R\,h\,\Delta R + \pi\,R^2\,\Delta h$$

dir. $\Delta R = \Delta h = k$ olup

$$V \cong \pi(2\,R\,h\,k + R^2 k)$$

bulunur.

Bulunan iki değer arasındaki fark

$$\pi(h\,k^2 + 2\,R\,k^2 + k^3)$$

kadardır. Bu ise k nın kareli ve küplü terimlerini kapsar. k küçük ise yaklaşık çözüm, gerçek çözüm yerine kullanılabilir.

20.5 - 5. Hata hesabı.

Bir miktarın ölçülmesinde veya hesabında bazı hatalar yapıldığını; gerçek değerle ölçülen veya hesaplanan değer arasındaki

$$u - u_1 = \Delta u$$

farkının *mutlak hata;* $\dfrac{\Delta u}{u}$ oranının da *bağıl hata* olarak adlandırıldığını 11-5 de incelemiştik. Şimdi bu konuyu değişken sayısının birden fazla olması haline uygulayalım. Örneğin bir sarkacın l uzunluğunun ve g ivmesinin ölçülmesinde bir miktar hata yapılmış ise, bu sarkacın per-

yodunun $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ formülünden hesaplanan değerindeki hatanın ne olacağını araştıralım. l ve g nin ölçülmesinde yapılan $\Delta l, \Delta g$ hataları yeter derecede küçük iseler T nin hesabında yapılan ΔT hatası $\Delta T \sim dT$ olduğu düşünülerek hesaplanır. Hatanın işareti veya gerçek değeri üzerinde kesin bilgi sahibi olmadığımızdan hataların maksimum değerleri aranır ve sonuç olarak hatanın kimden küçük olduğu belirtilir.

$u = f(x, y, z, ...)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $x, y, z, ...$ lerin $\Delta x, \Delta y, \Delta z, ...$ yakınlıkla değerlerini bildiğimizi farzediyoruz. Bu takdirde u nun hesabında yapılan hata

$$\Delta u = f(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y\ ,\ z + \Delta z\ , \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

dır.

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, ...$ hatalarının mutlak değerleri yeter derecede küçük iseler, Δu toplam artımı yerine fonksiyonun toplam diferansieli alınabilir. Bu takdirde

$$\Delta u \cong \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \ldots ,$$

yaklaşık değeri elde edilir. Bu bağıntıdaki kısmî türevler ve bağımsız değişkenlere ait hatalar pozitif veya negatif olabilirler. Bunlar yerine mutlak değerleri konursa

$$|\Delta u| \leqq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| |\Delta z| + \ldots .$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da bize aranılan hatanın kimden küçük olduğunu yani maksimum değerini verir.

u nun hesabında yapılan maksimum bağıl hatanın hesaplanması istenirse yukarıdaki bağıntının terimlerini $|u| = |f(x, y, z, ...)|$ ye bölmelidir. Bu halde

$$\frac{|\Delta u|}{|u|} \leqq \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right| |\Delta y| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f}\right| |\Delta z| + \ldots .$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \log |f| \quad ; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y} \log |f| \quad , \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f} = \frac{\partial}{\partial z} \log |f|$$

olup bağıl hata

$$\boxed{\frac{|\Delta u|}{|u|} \leqq \left| \frac{\partial}{\partial x} \log |f| \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \log |f| \right| |\Delta y| + \left| \frac{\partial}{\partial z} \log |f| \right| |\Delta x| + \ldots .}$$

şeklinde de gösterilebilir.

ÖRNEK 1. $u = x + y + z$ ise

$$|\Delta u| \leqq |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$$

dir.

ÖRNEK 2. $u = x - y$ ise

$$|\Delta u| \leqq |\Delta x| + |\Delta y|$$

dir.

ÖRNEK 3. $u = x\,y$ ise

$$|\Delta u| \leqq |x| \ |\Delta y| + |y| \ |\Delta x|$$

$$\frac{|\Delta u|}{|u|} \leqq \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|}$$

dır.

ÖRNEK 4. $u = \dfrac{x}{y}$ ise

$$|\Delta u| \leqq \frac{|y| \ |\Delta x| + |x| \ |\Delta y|}{y^2}$$

$$\frac{|\Delta u|}{|u|} \leqq \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|}$$

dir.

ÖRNEK 5. Bir sarkacın l uzunluğu 0,01 m hata ile $l = 1$ m ; π sayısı 0,005 hata ile $\pi = 3{,}14$ ve g ivmesi 0,02 m/s² hata ile $g = 9{,}8$ m/s² olarak alınırsa T peryodunun hesabında yapılan maksimum bağıl hatayı bulunuz.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

olup

$$\frac{|\Delta T|}{|T|} = |\Delta \log T|$$

dir. Diğer taraftan

$$\log T = \log 2 + \log \pi + \frac{1}{2}\log l - \frac{1}{2}\log g$$

ve $\Delta\pi = 0{,}005$, $\Delta l = 0{,}01$ m , $\Delta g = 0{,}02$ m/s² olup

$$\frac{|\Delta T|}{|T|} \leqq \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{2l} + \frac{\Delta g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0.02}{2\,.\,9{,}8} = 0{,}0076$$

dır.

ÖRNEK 6. Dirençleri r_1, r_2, r_3 olan üç direnç teli paralel olarak bağlanmışsa, sonuç olan R direnci

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

bağıntısı ile verilmiştir. r_1, r_2, r_3 ün ölçülmesinde aynı E bağıl hatası yapıldığı zaman R in hesabında yapılacak bağıl hatanın da E olacağını gösteriniz.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

den

$$\frac{dR}{R^2} = -\frac{\Delta r_1}{r_1^2} - \frac{\Delta r_2}{r_2^2} - \frac{\Delta r_3}{r_3^2}$$

$$\frac{\Delta R}{R^2} \cong \frac{\Delta r_1}{r_1}\,\frac{1}{r_1} + \frac{\Delta r_2}{r_2}\,\frac{1}{r_2} + \frac{\Delta r_3}{r_3}\,\frac{1}{r_3}$$

yazılabilir. $\frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{\Delta r_3}{r_3} = E$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta R}{R} \cong E\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = E \cdot \frac{1}{R}$$

$$\frac{\Delta R}{R} \cong E$$

bulunur.

20.6 Kapalı fonksiyonların türevleri

20.6 - 1. f(x, y) = 0 kapalı fonksiyonunun türevi.

$f(x, y) = 0$ şeklindeki bir bağıntının y yi x in kapalı bir fonksiyonu olarak tanımladığını biliyoruz. Bu bağıntıdan $\frac{dy}{dx}$ türevini hesaplamak istiyoruz. Bunun için de $u = f(x, y)$ fonksiyonunun toplam diferansielini tanımlarken bulduğumuz (Bak. 20.5-1.)

$$\Delta u = f'_x(x, y)\, \Delta x + f'_y(x, y)\, \Delta y + \varepsilon_1\, \Delta x + \varepsilon_2\, \Delta y$$

bağıntısını gözönüne alalım. $f(x, y) = 0$ halinde $\Delta u = 0$ olduğu gözönüne alınır ve her iki taraf Δx ile bölünürse

$$f'_x(x, y) + f_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

elde edilir. Şimdi de bu ifadenin $\Delta x \to 0$ halindeki limitini arayalım. $\Delta x \to 0$ halinde $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$, $\varepsilon_1 \to 0$ ve $\varepsilon_2 \to 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

veya

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}=0$$

bulunur. Buradan da $\dfrac{dy}{dx}$ çözülürse

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}}$$

elde edilir.

ÖRNEK 1. $x^2+3xy^2+y^3-1=0$ dan $\dfrac{dy}{dx}$ i bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=6xy+3y^2$$

olup

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y^2}{6xy+3y^2}$$

dir.

ÖRNEK 2. $x\operatorname{tg} y+y\operatorname{tg} x=5$ den $\dfrac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\operatorname{tg} y+y\sec^2 x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\sec^2 y+\operatorname{tg} x$$

olup

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\operatorname{tg} y+y\sec^2 x}{x\sec^2 y+\operatorname{tg} x}$$

dir.

20.6-2. F(x, y, z) = 0 kapalı fonksiyonunun türevi

$F(x,y,z)=0$ eşitliğinin z i x,y nin kapalı bir fonksiyonu olarak tanımladığını farzedelim. Bu takdirde $z=z(x,y)$ olup $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ türevleri hesaplanmak istenir. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ için y sabit ve $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ için x

sabit farzedelim. Buna göre 20.6-1. deki formül uygulanırsa

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}} \quad ; \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

formülleri elde edilir.

ÖRNEK 1. $e^z + x^2y + z + 5 = 0$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ türevlerini hesaplayınız.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1$$

olup

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ ise

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{y^2 - z^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1)}{\sqrt{y^2 - z^2}}$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2\sqrt{y^2 - z^2}}{x^2 z(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1)} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1)}$$

olup

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2\sqrt{y^2 - z^2}}{z(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1)} + \frac{1}{z(2\sqrt{y^2 - z^2} + 1)} = \frac{1}{z}$$

dir.

ÖRNEK 3. $\dfrac{z}{x} = f\left(\dfrac{y}{z}\right)$ ise $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ olduğunu gösteriniz.

$$F(x, y, z) = \frac{z}{x} - f\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{z}{x^2} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{z} f'\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{x} + \frac{y}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right)$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{z}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{z^2} f'\left(\dfrac{y}{z}\right)} = \frac{z}{x + \dfrac{x^2 y}{z^2} f'\left(\dfrac{y}{z}\right)} = \frac{z^3}{xz^2 + x^2 y\, f'\left(\dfrac{y}{z}\right)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{1}{z} f\left(\dfrac{y}{z}\right)}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{z^2} f'\left(\dfrac{y}{z}\right)} = \frac{xz\, f'\left(\dfrac{y}{z}\right)}{z^2 + xy\, f'\left(\dfrac{y}{z}\right)}$$

olup

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^3}{z^2 + xy\, f'\left(\dfrac{y}{z}\right)} + \frac{xyz\, f'\left(\dfrac{y}{z}\right)}{z^2 + xy\, f'\left(\dfrac{y}{z}\right)} = z$$

olduğu görülür.

20.7 Değişken dönüştürmeleri ve Fonksiyonel determinant

Diferansiel hesap uygulamalarında bir veya çok değişkenli türev veya diferansielleri içeren ifadelerin, değişken dönüştürmesi yardımiyle, başka şekillere sokulduğuna sık sık rastlanır. Bu şekildeki dönüştürmeler, yeni bir değişken ortaya atmak veya bağımsız değişkenlerle bağımlı değişkenin rollerini değiştirmek suretiyle olabilir. Şimdi bunları, tek bağımsız değişken hali ve iki bağımsız değişken hali için ayrı ayrı göstermeğe çalışalım.

20.7 - 1. Tek bağımsız değişken hali.

x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu $y = f(x)$ olsun.

$$W = F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

de x, y ve y nin x e göre belirli mertebeye kadar türevlerini içeren bir bağıntı olsun. Burada x yerine, $x = \varphi(t)$ bağıntısı ile verilmiş bir t değişkenini dahil edelim. Amaç, W ifadesinde x yerine t yi ve bunun sonucu olarak y nin x e göre türevleri yerine y nin t ye nazaran türeverini ithal etmektir.

Buna göre $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ den

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}\right] \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}\right)' \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left[\left(\frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\varphi'(t)}\right)' \frac{1}{\varphi'(t)}\right]' \frac{1}{\varphi'(t)}$$

. . . . . . , ... , , . .

elde edilir.

Eğer, x bağımsız değişkeni ile y bağımlı değişkeninin rolleri değiştiriliyorsa bu takdirde yukarıdaki ifadelerde $t = y$ olduğunu düşünmek gerekir. Bu halde

$$\frac{dy}{dt} = 1 \quad \text{olarak} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\,\frac{x''}{x'^3}$$

olur.

ÖRNEK 1. $x = \frac{1}{t}$ dönüştürmesi halinde

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2} y = 0$$

denkleminin alacağı şekli bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = -t^2 \frac{dy}{dt} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2}\right)(-t^2)$$

olarak denklem

$$\frac{1}{t^2} \cdot t^2 \left(2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2}\right) - \frac{2}{t} \cdot t^2 \frac{dy}{dt} + a^2 t^2 y = 0$$

$$2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} + a^2 t^2 y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2 y = 0$$

şeklini alır.

ÖRNEK 2. y bağımsız değişken olarak düşünüldüğü takdirde

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0$$

denkleminin alacağı şekli bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

olarak denklem

$$x \frac{d^2x}{dy^2} - 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$$

şeklini alır.

20.7 - 2. Birden fazla bağımsız değişken hali.

Konuyu basitleştirmek için bağımsız değişken sayısının iki olduğunu farzedeceğiz. $z = z(x, y)$ olarak x ve y gibi iki bağımsız değişkenin fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$W = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\right)$$

bağıntısı da x, y, z ve z nin belirli bir mertebeye kadar kısmî türevlerini içeren bir bağıntı olsun.

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v)$$

değişken dönüştürmesi yapıldığı zaman W bağıntısının ne şekil alacağı söz konusudur. u, v bağımsız değişken seçildiğine göre W bağıntısında x, y yerine u, v nin dahil edilmesi ve bunun sonucu olarak ta z nin x, y ye göre türevleri yerine u, v ye nazaran türevlerinin dahil edilmesi gerekir.

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v)$$

lerden

$$u = u(x, y) \quad , \quad v = v(x, y)$$

bağıntısı yazılabileceğine göre z yi u ve v vasıtasiyle x, y nin bileşik bir fonksiyonu gibi düşünebiliriz. Buna göre

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

yazılabilir. Bunlarda bulunan $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ kısmî türevleri

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v)$$

eşitliklerinden elde edilebilir. Gerçekten bu ifadelerin evvelâ x e, sonra da y ye göre türevleri hesaplanırsa

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} ; \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} ; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] 1 = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

denklem sistemleri elde edilir. Bunların birincisinden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] 0 & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\Delta_1} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\Delta_1}$$

ve ikincisinden de

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] 1 & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\Delta_1} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\Delta_1}$$

elde edilir. Bunlar yukarıda elde edilen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ifadelerinde yerlerine konursa, bu kısmî türevler z in u ve v ye göre türevleri cinsinden ifade edilmiş olur.

Daha yüksek mertebeden türevler de, arka arkaya aynı formüllerin uygulanması suretile elde edilir.

ÖRNEK 1. $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$ dönüştürmeleri yapıldığı takdirde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

bağıntısının alacağı şekli bulunuz.

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial x}\quad;\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

olup $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ leri bulmak üzere

$$x=\rho\cos\theta\quad,\quad y=\rho\sin\theta$$

eşitliklerinin x ve y ye göre türevleri alınırsa

$$\begin{cases}1=\cos\theta\,\dfrac{\partial \rho}{\partial x}-\rho\sin\theta\,\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\\[2ex] 0=\sin\theta\,\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\cos\theta\,\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\end{cases}\qquad \begin{cases}0=\cos\theta\,\dfrac{\partial \rho}{\partial y}-\rho\sin\theta\,\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\\[2ex] 1=\sin\theta\,\dfrac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\cos\theta\,\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\end{cases}$$

denklem sistemleri elde edilir. Bunlardan da

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\cos\theta\quad;\quad \frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y}=\sin\theta\quad;\quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{\rho}$$

bulunur. Bu sonuçlar $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ bağıntılarında yerlerine konursa

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial \rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\quad;\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

elde edilir. Bunların da bir daha kısmî türevleri alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\,\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{\rho}\,\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

ve bunları da taraf tarafa toplarsak

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}}$$

bulunur.

ÖRNEK 2. $\alpha = x - at$, $\beta = x + at$ dönüştürmesi yapılması halinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denkleminin alacağı şekli bulunuz.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\,\frac{\partial \beta}{\partial t} = a\left(-\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\,\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t}$$

$$= a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)(-a) + a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta\,\partial \alpha}\right)a$$

$$= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} \right) \cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \, \partial \alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) \cdot 1$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \alpha} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$$

olarak $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ denkleminde yerlerine konursa

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0$$

bulunur.

20.7 - 3. Ters dönüşümler ve fonksiyonel determinant.

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \tag{1}$$

olsun. Bu iki denklemden u ve v nin tek türlü çözülebileceğini kabul edelim ve bu çözümler

$$u = u(x, y) \quad , \quad v = v(x, y) \tag{2}$$

olsun. Bundan başka, bu dört fonksiyon türetilebilen fonksiyonlar olsunlar.

Bu bağıntılardan (1) verildiğine göre, (2) ye geçmeden $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ türevlerini ve (2) verildiğinde (1) e geçmeden $\frac{\partial x}{\partial u}$ $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ türevlerini hesaplamak isteyelim. Buradan (1) verildi-

ğine göre $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ türevlerini 20.7-2. de

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

olduğuna göre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\Delta_1} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\Delta_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial x}{\partial v}}{\Delta_1} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\Delta_1}$$

olarak hesaplamıştık.

Aynı şekilde (2) denklemlerinin u ve v ye göre türevlerini yazarak, elde edilecek

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ 1 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

denklemlerinden

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\Delta_2} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\Delta_2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\Delta_2} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\Delta_2}$$

bulunur.

Bu türevlerin paydalarını teşkil eden Δ_1, Δ_2 determinantlarının sıfırdan farklı olması halinde, bu türevler mevcuttur.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

determinantına x ve y fonksiyonlarının u ve v ye göre *Fonksiyonel determinantı veya jakobieni* denir. Aynı şekilde

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

determinantına da u ve v foonksiyonlarının x ve y ye göre fonksiyonel determinantı veya jakobieni denir. Bu determinantlar işaretle

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}$$

şeklinde gösterilir.

Genel olarak

$$u_1 = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$u_2 = F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$u_n = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

fonksiyonlarının $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerine göre fonksiyonel determinantı

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

dir. Biraz sonra da göstereceğimiz gibi fonksiyonel determinant, tek değişkenli fonksiyonlarda türevin oynadığı rolü oynar ve onun özeliklerine benzer özelikleri vardır.

Fonksiyonel determinantın özelikleri.

1. *Birinci özelik.*

$$u = f_1(x, y, z) \quad , \quad v = f_2(x, y, z) \quad , \quad w = f_3(x, y, z)$$
$$x = \varphi_1(X, Y, Z) \quad , \quad y = \varphi_2(X, Y, Z) \quad , \quad z = \varphi_3(X, Y, Z)$$

olduğuna göre

$$\boxed{\frac{D(u, v, w)}{D(X, Y, Z)} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}}$$

dir.

Bu bağıntı, bir değişkenli fonksiyonlarda fonksiyon fonksiyonuna ait $[y = f(u)\ ,\ u = \varphi(x)$ olmak üzere$]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

formülünün daha genel şeklidir.

Yukarıdaki bağıntının doğru olduğunu ispatlamak üzere, iki taraftaki fonksiyonel determinant sembolleri yerine determinantlar cinsinden değerlerini yazalım. Bu takdirde

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

elde edilir. İkinci taraftaki determinantlar satır-sütun kombinasyonuna göre çarpılırsa elde edilecek determinantın elemanları birinci taraftaki determinantın aynı sıra numaralı elemanlarına eşit olur. Örneğin ikinci tarafta elde edilecek determinantın birinci satırının birinci sütunundaki elemanı

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial X}$$

olacaktır. Bu ise $\frac{\partial u}{\partial X}$ kısmî türevinin ifadesinden başka birşey değildir. Aynı şekilde, diğer elemanlar için bu durum gösterilebilir.

2. *İkinci özelik.*

Birinci özelikte gözönüne alınan u, v, w ler, x, y, z lerin fonksiyonları olduklarına göre, x, y, z leri de u, v, w lerin fonksiyonları olarak kabul etmek mümkündür. Yani birinci özelikte aldığımız X, Y, Z değişkenleri yerine u, v, w leri alabiliriz. Bu takdirde birinci özelikteki (1) bağıntısında

$$X = u \quad , \quad Y = v \quad , \quad Z = w$$

yazılmakla, birinci tarafın

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olacağı gözönünde tutularak

$$\boxed{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = 1}$$

veya

$$\boxed{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}}}$$

bulunur.

Buna göre, u, v, w nin x, y, z ye göre jakobieni, x, y, z nin u, v, w ye göre jakobieninin tersine eşittir. Bu özelik de tek değişkenli fonksiyonlardaki

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

özeliğine benzer.

Benzer şekilde

$$u = f_1(x, y) \quad , \quad v = f_2(x, y)$$

$$x = \varphi_1(u, v) \quad , \quad y = \varphi_2(u, v)$$

ise

$$\boxed{\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1} \quad \text{veya} \quad \boxed{\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}}$$

yazılabilir.

3. *Üçüncü özelik.*

Herbiri n değişkenli n fonksiyonun bir bağıntı ile birbirine bağlı olabilmesi için gerek ve yeter şart, bu fonksiyonların jakobieninin sıfır olmasıdır.

Üç değişkenli üç fonksiyon

$$u = f_1(x, y, z) \quad , \quad v = f_2(x, y, z) \quad , \quad w = f_3(x, y, z)$$

olsun. Bunlar verilmiş iken u, v, w ler arasında bir bağıntı olabilmesi için

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = 0$$

olması gerek ve yeterdir.

u, v, w ler arasında mevcut bir bağıntı

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

olsun. φ nin x, y, z ye göre türevleri alınırsa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

bağıntıları elde edilir. Bu denklemler $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$ ye göre lineer homojen bir denklem sistemi teşkil ederler. $\varphi(u, v, w)$ fonksiyonu, hipotez gereğince u, v, w lerden en az birini içereceğinden $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$ nin üçü aynı zamanda sıfır değildir. O halde sistemin bir aşikâr olmıyan çözüm takımının olması gerekir. Bu ise, homojen denklem sistemi teoremine göre, katsayılar determinantının sıfır olması ile müm-

kündür. Bu determinant ise, u, v, w fonksiyonlarının x, y, z ye göre

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$$

fonksiyonel determinantından başka birşey değildir. Böylece şartın gerek olduğu gösterilmiş olur. Şartın yeter olduğu da yani, jakobien, sıfır ise $\varphi(u, v, w) = 0$ olacağı da kolayca gösterilebilir.

ÖRNEK 1. $u = \sqrt{xy}$, $v = e^{-xy} + xy$ fonksiyonlarının birbirine bağlı olduğunu gösteriniz.

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y}{2\sqrt{xy}} & \frac{x}{2\sqrt{xy}} \\ -y\,e^{-xy} + y & -x\,e^{-xy} + x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-xy\,e^{-xy} + xy}{2\sqrt{xy}} - \frac{-xy\,e^{-xy} + xy}{2\sqrt{xy}} = 0$$

olduğu görülerek bu iki fonksiyonun birbirine bağlı olduğu gösterilmiş olur. Bu sonuç, u ile v arasında

$$v = e^{-u^2} + u^2$$

bağıntısının mevcut olduğunu çıkarmakla da gösterilebilir.

ÖRNEK 2. $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ için

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho \quad \text{ve} \quad \frac{D(\rho, \theta)}{D(x, y)} = \frac{1}{\rho}$$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho;$$

$$\frac{D(\rho, \theta)}{D(x, y)} = \frac{1}{\dfrac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)}} = \frac{1}{\rho}$$

ÖRNEK 3. $F(x, y, z) = 0$, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ ise

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} dx + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} dy + \frac{D(x, y)}{D(u, v)} dz = 0$$

olduğunu gösteriniz.

$F(x, y, z) = 0$ dan

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0 \tag{1}$$

yazılabilir.

$$x = f(u, v) \quad , \quad y = g(u, v) \quad , \quad z = h(u, v)$$

olduğuna göre

$$F(x, y, z) = F[f(u, v) \ , \ g(u, v) \ , \ h(u, v)] = 0$$

olup buradan u ve v ye göre türev alınırsa

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial u} + F'_y \frac{\partial y}{\partial u} + F'_z \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial v} + F'_y \frac{\partial y}{\partial v} + F'_z \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

elde edilir. Bunlardan F'_x ve F'_y ler F'_z cinsinden çözülürse

$$F'_x = \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}} F'_z \quad , \quad F'_y = \frac{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}} F'_z$$

bulunur. Bunlar da (1) bağıntısında yerlerine konursa :

$$\frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}} F'_z \, dx + \frac{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}} F'_z \, dy + F'_z \, dz = 0$$

ve buradan da

$$\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\,dx + \frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\,dy + \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\,dz = 0$$

elde edilir.

20.8 Bir uzay eğrisinin teğeti ve bir yüzeyin teğet düzlemi

20.8 - 1. Bir uzay eğrisinin teğeti ve normal düzleminin denklemleri.

Uzay eğrisi

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad z = h(t)$$

parametrik denklemleriyle verilmiş olsun. t nin t_1 ve $t_1 + \Delta t$ değerlerine karşılık olan eğrinin iki noktası da

$$P(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1) \quad ; \quad Q(x_1 + \Delta x\ ,\ y_1 + \Delta y\ ,\ z_1 + \Delta z)$$

olsun. P noktasındaki teğet PQ keseninin limit durumudur. Buna göre PQ keseninin doğrultu sayıları

$$\Delta x \quad , \quad \Delta y \quad , \quad \Delta z$$

veya bunlarla orantılı olan

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad , \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

lerdir.

$\Delta t \to 0$ halinde Q noktası eğri üzerinde P noktasına yaklaşacak ve PQ keseni de P deki değet durumunu alacaktır.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \, , \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} \, , \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

ler de P noktasındaki teğetin doğrultu sayılarına yaklaşacak, yani

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \, , \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \, , \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_1$$

olacaklardır. Bunlara göre eğrinin $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$\boxed{\frac{x - x_1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_1}}$$

olur.

Bir uzay eğrisinin *normal düzlemi,* bu noktadan teğete dik olarak çizilen düzlemdir. Bu düzlemin normali, bu noktadaki teğet olacağından, doğrultu sayıları

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \, , \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \, , \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_1$$

olacaktır. O halde, uzay eğrisinin $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasındaki normal düzleminin denklemi

$$\boxed{\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 (z - z_1) = 0}$$

şeklindedir.

Uzay eğrisi,

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad , \quad \psi(x, y, z) = 0$$

denklemleriyle verilmiş iki yüzeyin arakesit eğrisi olarak tanımlanmışsa, teğet denklemini bulmak üzere, x i bağımsız değişken, y ve z i de bağımlı değişken kabul ederek, yukarıdaki fonksiyonların toplam türevlerini yazarsak

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

elde edilir. Bunlardan teğetin doğrultu sayıları olarak $\frac{dx}{dx}=1$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ çözülür ve $(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$ noktasındaki değerleri hesaplanırsa

$$1\ ,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_1\ ,\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_1$$

elde edilir. Buna göre, teğetin denklemi

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}=\frac{z-z_1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)_1}$$

olur.

ÖRNEK 1. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=c\,t$ parametrik denklemleriyle verilmiş bir uzay eğrisinin $t=t_1$ e karşılık olan noktasındaki teğeti ile normal düzleminin denklemlerini bulunuz.

$$x_1=a\cos t_1\quad,\quad y_1=a\sin t_1\quad,\quad z_1=c\,t_1$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1=-a\sin t_1\quad,\quad\left(\frac{dy}{dt}\right)_1=a\cos t_1\quad,\quad\left(\frac{dz}{dt}\right)_1=c$$

olarak teğet denklemi

$$\frac{x-a\cos t_1}{-a\sin t_1}=\frac{y-a\sin t_1}{a\cos t_1}=\frac{z-c\,t_1}{c}$$

ve normal düzlemin denklemi

$$-a\sin t_1(x-a\cos t_1)+a\cos t_1(y-a\sin t_1)+c(z-c\,t_1)=0$$

dır.

ÖRNEK. 2. $2x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 2 = 0$ $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ eğrisinin $(1, 2, -2)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Verilen denklemlerden x e göre türevler alınırsa

$$4x - 6y\frac{dy}{dx} + 6z\frac{dz}{dx} = 0$$

$$2x + 4y\frac{dy}{dx} + 6z\frac{dz}{dx} = 0$$

ve bunlardan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{5y} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{7x}{15z}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{1}{10} \quad , \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_1 = \frac{7}{30}$$

bulunur. O halde, $(1, 2, -2)$ noktasındaki teğetin denklemi

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{\frac{1}{10}} = \frac{z+2}{\frac{7}{30}}$$

veya

$$\frac{x-1}{30} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{7}$$

dir.

20.8 - 2. Bir yüzeyin teğet düzlemi ve normalinin denklemleri

$F(x, y, z) = 0$ denklemiyle tanımlanmış bir yüzey gözönüne alalım. Bir doğrunun, bir $P(x, y, z)$ noktasında bu yüzeye teğet olması demek, yüzeyin bu noktasından geçen ve bu yüzey üzerinde bulunan bir eğriye teğet olması demektir. $P(x, y, z)$ noktasından, bu yüzey üzerine sonsuz sayıda eğri çizilebileceğine göre, yüzeyin bu noktadan geçen sonsuz sayıda teğeti olacaktır.

TEOREM. $F(x, y, z) = 0$ *yüzeyinin herhangi bir* $P(x_1, y_1, z_1)$ *noktasındaki bütün teğetleri aynı bir düzlem üzerindedir. (Teğet düzlem).*

İspat : $F(x, y, z) = 0$ yüzeyi üzerinde bulunan ve bu yüzeyin $P(x_1, y_1, z)$ noktasından geçen bir eğri gözönüne alalım. Bu eğrinin parametrik denklemleri

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad z = h(t)$$

olsun. Bu eğrinin P noktasındaki teğeti, tanım icabı, yüzeyin de teğeti olacaktır. Bu teğetin denklemi

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_1}$$

dir. Parametrik denklemleri

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad z = h(t)$$

olan eğri, yüzey üzerinde bulunduğundan, bu denklemler yüzey denklemlerini de sağlıyacaklar, yani

$$F(x, y, z) = F[f(t), g(t), h(t)] = \varphi(t)$$

olacaktır. O halde, $F(x, y, z)$, t nin bir bileşik fonksiyonu durumundadır. $F(x, y, z) = 0$ ın t ye göre toplam türevini alırsak

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

elde edilir. Bu bağıntı, bileşenleri

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

olan iki vektörün skaler çarpımının, sıfıra eşit olduğunu tanımlar. Bu vektörlerden, bileşenleri

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

olanı teğet vektör olduğuna göre diğeri, yani bileşenleri

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

olan vektör normal vektör olmak durumundadır. Bu sonuç, yüzeyin $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen her eğri için gösterilebilir. Nokta değişmeyeceğine göre, her gösterilişte

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$$

ler değişmeyecek ve P noktasındaki bütün teğetler, bu noktadaki normale dik olacak ve dolayısile aynı bir düzlem üzerinde bulunacaklardır. İşte bu düzleme yüzeyin P noktasındaki teğet düzlemi denir.

Bu düzlemin normalinin doğrultu sayıları

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1$$

olarak teğet düzlemin denklemi

$$\boxed{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 (z - z_1) = 0}$$

olacaktır.

Normalin denklemi ise

$$\boxed{\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1}}$$

dir.

ÖRNEK. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ yüzeyinin $(1, 1, 2)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normalinin denklemlerini bulunuz.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = (3x^2 - 3yz)_1 = -3$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = (3y^2 - 3xz)_1 = -3$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = (3z^2 - 3xy)_1 = 9$$

olup teğet düzlemin denklemi

$$-3(x-1) - 3(y-1) + 9(z-2) = 0$$

$$x + y - 3z + 4 = 0$$

ve normalin denklemi

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-3}$$

dir.

20.9 Düzlem eğrilerde zarf

20.9 - 1. Eğri ailesi tanımı.

Bir eğrinin denklemi, genellikle x, y değişkenlerine ve bazı sabitlere bağlı olarak verilir. Örneğin

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$

denklemi, merkezi ox ekseni üzerinde α apsisli bir noktada olan R yarıçaplı bir çemberi gösterir. α nın bir seri değerler aldığını farzedelim. Bu suretle merkezlerinin orijine uzaklıkları farklı birçok çemberler elde ederiz.

Bu şekilde meydana gelmiş olan bütün eğrilere bir *eğri ailesi* denir. Burada α, ailenin eğrilerinden birini belirten bir sabittir. α, ailenin bir eğrisinden diğerine geçişte değişir. Bu sebeple α ya *parametre* denir. Parametre birden fazla da olabilir. Yukarıdaki çember ailesi, bir parametreye bağlı ailedir. α değişken parametresini fonksiyon sembolü içine dahil edersek bir eğri ailesinin denklemi

$$\boxed{f(x, y, \alpha) = 0}$$

şeklinde olur.

20.9 - 2. Bir parametreye bağlı eğri ailesinin zarfı.

Bir ailenin eğrilerinin teğet olduğu aynı bir eğriye veya bir gurup eğriye, bu eğri ailesinin zarfı denir.

Şimdi bir eğri ailesinin zarfının denklemini bulmak için bir kural aramağa çalışalım.

Parametrik denklemleri

$$x = \varphi(\alpha) \quad , \quad y = \psi(\alpha) \tag{1}$$

olan eğrinin, denklemi

$$f(x, y, \alpha) = 0 \tag{2}$$

olan eğri ailesinin her eğrisine teğet, yani bu ailenin zarfı olduğunu farzedelim. (1) eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğimi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\alpha}}{\dfrac{dx}{d\alpha}}$$

ve (2) eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğimi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y, \alpha)}{f'_y(x, y, \alpha)}$$

dır. (1) ve (2) eğrileri teğet durumda iseler, değme noktalarında, aynı bir α için eğimleri eşit olmalıdır. Buna göre

$$\frac{\dfrac{dy}{d\alpha}}{\dfrac{dx}{d\alpha}} = -\frac{f'_x(x, y, \alpha)}{f'_y(x, y, \alpha)}$$

veya

$$f'_x(x, y, \alpha)\frac{dx}{d\alpha} + f'_y(x, y, \alpha)\frac{dy}{d\alpha} = 0 \tag{3}$$

dır. Baştaki hipotezimize göre (1) ve (2) eğrileri α nın her değeri

için teğettir. Nihayet α nın bütün değerleri için (1) denklemi ile verilmiş olan (x, y) noktası, (2) ailesinin bir eğrisi üzerinde bulunacaktır. O halde $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$ lar α nın her değeri için $f(x, y, \alpha) = 0$ denklemini sağlıyacaklar yani

$$f[\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha] = 0$$

olacaktır. Buna göre $f(x, y, \alpha)$ fonksiyonu x ve y vasıtasile α nın bir bileşik fonksiyonudur. Bu nedenle $f(x, y, \alpha) = 0$ ın toplam türevi hesaplanırsa

$$f'_x(x, y, \alpha)\frac{dx}{d\alpha} + f'_y(x, y, \alpha)\frac{dy}{d\alpha} + f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \qquad (4)$$

elde edilir. (3) ve (4) bağıntıları mukayese edilirse

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

olduğu görülür. O halde zarf üzerindeki noktaların koordinatları

$$\boxed{f(x, y, \alpha) = 0 \quad , \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0}$$

denklemlerini sağlamış olacağından, bu denklemler zarfın parametrik denklemlerini veren bağıntılar olacaklardır. Bu bağıntılardan x ve y ler α nın fonksiyonları olarak çözülürlerse, zarfın

$$x = \varphi(\alpha) \quad , \quad y = \psi(\alpha)$$

şeklindeki parametrik denklemleri elde edilir.

ÖZET. Bunlara göre zarfın parametrik denklemlerini bulmak için :

1) ***Eğri ailesinin denkleminin parametreye göre türevi hesaplanır.***

2) ***Bu denklem ve eğri ailesi denkleminden x ve y parametreye bağlı olarak çözülür. Elde edilenler zarfın parametrik denklemleridir.***

İHTAR : Zarfın kartezyen denklemini bulmak istenirse, parametrik denklemlerden veya

$$f(x, y, \alpha) = 0 \quad , \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

denklem çiftinden α yokedilir.

ÖRNEK 1. $(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$ çember ailesinin zarfını bulunuz.

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 2(x - \alpha) = 0 \quad \text{dan} \quad x = \alpha$$

olup ailenin denkleminde yerine konursa

$$y^2 = R^2 \quad \text{veya} \quad y = \pm R$$

yani $y = +R$ ve $y = -R$ doğruları elde edilir.

ÖRNEK 2. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ doğru ailesinin zarfını bulunuz. (α parametre)

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0$$

denklemlerinden

$$x = p \cos \alpha \quad , \quad y = p \sin \alpha$$

bulunur ki bunlar, zarfın parametrik denklemleridir. Bu iki denklemin kareleri alınır, taraf tarafa toplanırsa zarfın kartezyen denklemi olarak

$$x^2 + y^2 = p^2$$

elde edilir.

20.10 İki değişkenli fonksiyonlar için Taylor ve Maclaurin formülleri

20.10 - 1. İki değişkenli fonksiyonlar için Taylor formülü.

$f(x, y)$ fonksiyonu, x ve y bağımsız değişkenlerinin iki değişkenli bir fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonun, gözönüne alınan bir böl-

gede sürekli ve her mertebeden kısmî türevlere malik olduğunu farzedelim.

$f(a+h, b+k)$ ifadesini h ve k nın kuvvetlerine göre yazmak isteyelim. Bu takdirde elde edilen formüle Taylor formülü denir.

h ve k yı bir t değişkeni ile çarparsak, $f(a+ht, b+kt)$ ifadesi t nin bir fonksiyonu olur. Bu fonksiyonu

$$F(t) = f(a+ht, b+kt) = f(x, y)$$

ile gösterelim. $f(x, y)$ fonksiyonu sürekli ve her mertebeden kısmî türevlere malik olduklarından t nin tek değişkenli $F(t)$ fonksiyonu da sürekli ve her mertebeden türeve malik olacaktır. Buna göre, $F(t)$ fonksiyonuna Maclaurin formülü uygulanabilir. Yani

$$(1) \qquad F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \dots$$
$$+ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(\theta t)$$

yazılabilir. θ, 0 ile 1 arasında bir sayıdır.

Bu eşitlikte $t = 1$ yaparsak

$$(2) \qquad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \dots$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$F(1) = f(a+h, b+k) \quad , \quad F(0) = f(a, b)$$

dir. Şimdi de $F'(0), F''(0), \dots$ türevlerini hesaplıyalım.

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

$$F'(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a, b)$$

$$F''(t) = \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= h\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + k\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + h\,k\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + k\,h\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,h\,k\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f$$

$$F''(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(a,\ b)$$

. . . .

. . . .

$$F^{(r)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(r)} f(a,\ b)$$

yazılabilir. Bu ifadeler (2) ifadesinde yerine konursa

$$(3)\qquad f(a+h,\ b+k) = f(a,\ b) + \frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(a,\ b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(a,\ b) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)} f(a,\ b)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(a+\theta\,h,\ b+\theta\,k)$$

elde edilir. *Bu formül iki değişkenli* $f(x,y)$ *fonksiyonu için Taylor formülüdür.* Bu formüldeki

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(a + \theta\, h,\ b + \theta\, k)$$

terimi, n *terimden sonraki kalan* adını alır.

Bu formülde a yerine x ve b yerine y yazılırsa

$$(4)\qquad f(x + h,\ y + k) = f(x,\ y) + \frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(x,\ y)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x,\ y) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)} f(x,\ y)$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(x + \theta\ h,\ y + \theta\ k)$$

elde edilir. (3) formülünde $a + h = x\,, b + k = y$ yapılırsa $h = x - a$ ve $k = y - b$ olarak formül

$$f(x,\ y) = f(a,\ b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(1)} f(a,\ b)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(a,\ b) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n-1)} f(a,\ b) + R$$

şeklini alır. Bunlar, Taylor formülünün değişik şekilleridir.

ÖRNEK. $(1\,, -1)$ noktası civarında, $f(x\,, y) = e^{x+y}$ fonksiyonuna Taylor formülünü uygulayınız. (Üçüncü mertebe türeve kadar olan terimler belirtilecek)

$$f(x,\ y) = f(1,\ -1) + \frac{1}{1!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(1)} f(1,\ -1)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(1,\ -1)$$

$$+\frac{1}{3!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)} f(1,\,-1)$$

ve

$$\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(1)} f(1,\,-1)=(x-1)+y+1$$

$$\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(1,\,-1)=[\,(x-1)+(y+1)\,]^2$$

$$\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)} f(1,\,-1)=[\,(x-1)+(y+1)\,]^3$$

olarak

$$e^{x+y}=1+\frac{(x-1)+(y+1)}{1!}+\frac{[\,(x-1)+(y+1)\,]^2}{2!}$$
$$+\frac{[\,(x-1)+(y+1)\,]^3}{3!}+R$$

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+R$$

dir.

20.10 - 2. İki değişkenli fonksiyonlar için Maclaurin formülü.

20.10-1. deki (3) formülünde $a=0\,,b=0\,,h=x\,,k=y$ yapılırsa

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(0,0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(0,0)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right.$$
$$\left.+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)} f(0,0)+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(\theta x,\,\theta y)$$

formülü elde edilir ki bu da $f(x\,,y)$ fonksiyonunun *Maclaurin formülü* adını alır.

ÖRNEK. $f(x, y) = e^x \sin y$ fonksiyonuna, 3. mertebe türevin bulunduğu terime kadar, Maclaurin formülünü uygulayınız.

$$f(0, 0) = 0$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(0,0) = x(e^x \sin y)_{(0,0)} + y(e^x \cos y)_{(0,0)} = y$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(0,0) = x^2(e^x \sin y)_{(0,0)} + 2xy(e^x \cos y)_{(0,0)} +$$

$$y^2(-e^x \sin y)_{(0,0)} = 2xy$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(0,0) = x^3(e^x \sin y)_{(0,0)} + 3x^2y(e^x \cos y)_{(0,0)} +$$

$$3xy^2 - e^x \sin y)_{(0,0)} + y^3(-e^x \cos y)_{(0,0)} = 3x^2y - y^3$$

olarak

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!} + R$$

20.11 İki değişkenli fonksiyonlarda maksimum, minimum

İki boyutlu bir bölgede tanımlanmış sürekli bir $z = f(x, y)$ fonksiyonu gözönüne alalım. *Bölgeye ait bir* (a, b) *noktasının civarındaki bütün* (x, y) *noktaları için*

$$f(x, y) < f(a, b)$$

oluyorsa, $f(a, b)$ *bir maksimum değer;*

$$f(x, y) > f(a, b)$$

oluyorsa, $f(a, b)$ *bir minumum değerdir denir.*

Diğer bir ifade ile, istenildiği kadar küçük pozitif bir ε sayısından nümerik olarak küçük olan her (h, k) değer çifti için

$f(a+h\,,b+k)-f(a\,,b)<0$	ise	$f(a\,,b)$	*maksimum* değer ;
$f(a+h\,,b+k)-f(a\,,b)>0$	ise	$f(a\,,b)$	*minumum* değer ;

dir. Bir fonksiyonun maksimum ve minumumlarına kısaca, bu fonksiyonun *ekstremum*ları denir.

Bir $z=f(x\,,y)$ *fonksiyonu, ancak birinci mertebeden kısmî türevlerini sıfır veya belirsiz (sonsuz da olabilir) kılan değer takımları için maksimum veya minumum olabilir.*

Gerçekten, fonksiyonun $(a\,,b)$ noktasında maksimum veya minumum olabilmesi için, $|h|<\varepsilon\,,|k|<\varepsilon$ için $f(a+h\,,b+k)-f(a\,,b)$ ifadesinin işaretinin değişmemesi gerekir. O halde bu ifadede $k=0$ yapılırsa bu özelik yine mevcut olacak yani

$$f(a+h\,,b)-f(a\,,b)$$

ifadesi aynı işareti muhafaza edecektir. Bu ise, bize $f(x\,,b)$ fonksiyonunun $x=a$ için maksimum veya minumum olduğunu gösterir. Bu ise $\frac{\partial f}{\partial x}$ kısmî türevinin $x=a\,,y=b$ için sıfır veya belirsiz olması ile mümkün olur. Buna benzer bir ispat $h=0$ alınmak suretile de yapılır ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmî türevinin sıfır veya belirsiz olması sonucu çıkarılır. Buradaki belirsiz değerler arasına sonsuz da dahildir. Bunlara göre $f(a\,,b)$ nin $f(x\,,y)$ nin bir maksimum veya minumum değeri olması için gereken şartlar

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=0\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=0} \tag{1}$$

dır.

$f(a\,,b)$ nin bir maksimum veya minumum olabilmesi için bu şartlar gerek olmakla beraber yeterli değildir. Yeter şartları elde etmek için $n=3$ için Taylor formülünü yazalım ve (1) şartlarını kullanalım. $0<\theta<1$ olmak üzere

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2!}\left[h^2 \frac{\partial f(a, b)}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + k^2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}\right] + \frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

veya

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \cong$$

$$\frac{1}{2!}\left[h^2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}\right] \quad (2)$$

yazılabilir. Biz, birinci tarafın işaretini inceliyeceğimize göre, $|h|$ ve $|k|$ o kadar küçük alınabilir ki $n = 3$ olan terim, $n = 2$ olan terimden daha küçük kalabilir. Zira $n = 3$ olan terim, h ve k ya göre, $n = 2$ olan terimden daha yüksek mertebedendir. O halde

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

nın işareti, ikinci terimin yani

$$h^2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}$$

ifadesinin işaretinin aynı olacaktır. Bu ifade k^2 parantezine alınır ve k^2 terkedilirse

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2}\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y}\left(\frac{h}{k}\right) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}$$

elde edilir. Bu ise $\frac{h}{k}$ ya göre bir ikinci derece üç terimlisi olup :

1) $$\left[\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y}\right]^2 - \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} > 0 \quad \text{ise :}$$

üç terimli reel köklere malik olacak ve $\frac{h}{k}$ oranının bu köklerin arasında veya dışında bulunmasına göre üç terimli farklı işaretlerde olacaktır. Dolayısile (2) ifadesinin ikinci tarafı daima aynı bir işarette olmayacaktır. O halde $f(a, b)$, maksimum veya minumum değer olamaz.

2) $\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \, \partial y}\right]^2 - \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} < 0$ ise :

üç terimli daima $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}$ nin işaretinde olacak ve dolayısile $f(a,b)$, bir maksimum veya bir minumum değer olabilecektir. Diğer taraftan, bu halin mevcudiyeti $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nin aynı işarette olmalarını gerektirir. Aksi halde bu ifade negatif olamazdı. Buna göre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ lerin pozitif olmaları halinde $f(a,b)$ minumum değer; negatif olmaları halinde $f(a,b)$ maksimum değerdir.

3) $\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \, \partial y}\right]^2 - \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} = 0$ ise :

Bu takdirde fonksiyonun (a,b) noktasındaki durumunun belirtilebilmesi uzun bir incelemeye ihtiyaç gösterir. Böyle bir halde "şüpheli hal" vardır denilir. Biz bu hali inceleyemeyeceğiz.

ÖZET. $z = f(x,y)$ fonksiyonunun maksimum ve minumum değerlerini bulmak için aşağıdaki sırada işlem yapılır.

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *denklemlerinin* $x = a$; $y = b$ *kökleri bulunur.*

2. $\Delta = \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \, \partial y}\right]^2 - \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}$ *nin işareti aranır.*

I. $\Delta > 0$ *ise maksimum veya minimum mevcut değil.*

II. $\Delta < 0 \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\text{veya } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0 & \textit{ise maksimum} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\text{veya } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) > 0 & \textit{ise minimum} \end{cases}$

III. $\Delta = 0$ *ise şüpheli hal.*

ÖRNEK 1. $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 8$ fonksiyonunun maksimum ve minumum değerlerini bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 - 12y = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12x = 0$$

dan $x = 0, y = 0$ ve $x = 1, y = 2$ değer çiftleri bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48x \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = -12 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

ve

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 144\,(1 - 2xy)$$

dir.

$x = 0, y = 0$ için $\Delta > 0$ olup bu noktada maksimum veya minumum yoktur.

$x = 1, y = 2$ için, $\Delta < 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48 > 0$ olup $f(1, 2) = 0$ minumum değerdir.

ÖRNEK 2. $z = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$ fonksiyonunun maksimum ve minumum değerlerini bulunuz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(1 - x^2 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y(1 - x^2 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

dan $x = 0, y = 0$ değer çifti bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = -4xy(2 - x^2 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f(0,\,0)}{\partial x \, \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = [2(1 - x^2 - y^2) - 4x^2 - 4x^2(1 - x^2 - y^2)]\, e^{-(x^2+y^2)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f(0,\,0)}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = [2(1 - x^2 - y^2) - 4y^2 - 4y^2(1 - x^2 - y^2)]\, e^{-(x^2+y^2)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f(0,\,0)}{\partial y^2} = 2$$

ve $\Delta = -4 < 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ olarak $f(0, 0) = 0$ minumum değerdir.

ÖRNEK 3. Toplamları bir a pozitif sayısına eşit ve çarpımları maksimum olan üç pozitif sayı bulunuz.

Bu üç sayıyı x, y ve $a - x - y$ ile gösterelim. Bunların çarpımları

$$u = xy(a - x - y)$$

olup hipoteze göre $x > 0$, $y > 0$, $a - x - y > 0$ yani $x + y < a$ ve $u > 0$ dır. Buna göre x ve y, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ doğrularının sınırladığı bölgede değer alırlar.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a - 2x - y) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x(a - x - 2y) = 0$$

denklem sisteminden

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad ; \quad M_1(0, 0)$$

$$x = 0 \quad , \quad y = a \quad ; \quad M_2(0, a)$$

$$x = a \quad , \quad y = 0 \quad ; \quad M_3(a, 0)$$

$$x = \frac{a}{3} \quad , \quad y = \frac{a}{3} \; ; \quad M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

değer çiftleri elde edilir. İlk üç nokta tanım bölgesinin çevresinde ve sonuncusu bölgenin içindedir. u fonksiyonu bölgenin içinde pozitif ve bölgenin çevresinde sıfıra eşittir. Buna göre u fonksiyonu $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ noktasında bir maksimum kabul eder. Çarpımın maksimum değeri

$$u_{\text{maks}} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3}\left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$$

dir. Bu sonucu yukarıda verdiğimiz kuralla araştıralım.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = a - 2x - 2y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x$$

$$\Delta = (a - 2x - 2y)^2 - 4xy$$

olup

$M_1(0,0)$ da $\Delta = a^2 > 0$ olarak maksimum veya minumum yok;

$M_2(0,a)$ » $\Delta = a^2 > 0$ » » » » »

$M_3(a,0)$ » $\Delta = a^2 > 0$ » » » » »

$M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ » $\Delta = -\frac{a^2}{3} < 0$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2a}{3} < 0$ olarak maksimum

20. BÖLÜME AİT PROBLEMLER.

1) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$ olduğuna göre $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ ve $f(1, -1)$ i hesaplayınız.

Cevap. $f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{5}{3}$; $f(1, -1) = -2$

2) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$ olduğuna göre $f(y, x)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ yi hesaplayınız.

Cevap. $f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{2yx}$; $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

3) $x^2 + y^2 = R^2$ çemberi üzerindeki noktalar için

$$z = \frac{x^4 + 2x^2 \cdot y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

fonksiyonunun değerlerini hesaplayınız.

Cevap. $z = \frac{R^4}{1 - R^2}$

4) $f(x + y, x - y) = xy + y^2$ olduğuna göre $f(x, y)$ yi bulunuz.

Cevap. $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{2}$

5) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ fonksiyonun tanım bölgesini bulunuz.

Cevap. $x^2 + y^2 \leqq 1$

6) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

Cevap. $-1 \leqq x \leqq +1$, $-1 \leqq y \leqq +1$

7) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} = ?$ Cevap. 0

8) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x} = ?$ Cevap. 2

9) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = ?$ Cevap. e^k

10) $z = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz.

Cevap. $x = 0$, $y = 0$

11) $z = \cos \frac{1}{xy}$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz.

Cevap. Koordinat eksenleri üzerindeki noktalar.

KISMÎ TÜREVLER.

Aşağıdaki fonksiyonların kısmî türevlerini hesaplayınız.

12) $z = x^3 + y^3 - 3axy$ Cevap. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - ay)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - ax)$

13) $z = \frac{x - y}{y + x}$ Cevap. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x + y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x + y)^2}$

14) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ Cevap. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^3}$

15) $z = \log(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Cevap. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}\,(x + \sqrt{x^2 + y^2})}$

16) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Cevap. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

17) $z = x^y$

Cevap. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\, x^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \log x$

18) $z = e^{\sin(y/x)}$

Cevap. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\, e^{\sin(y/x)} \cos\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\, e^{\sin(y/x)} \cos\dfrac{y}{x}$

19) $u = (xy)^z$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = yz(xy)^{z-1}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xz(xy)^{z-1}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \log xy$

20) $f(x, y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$ olduğuna göre $f'_x(2, 1)$ ve $f'_y(2, 1)$ i hesaplayınız.

Cevap. $f'_x(2, 1) = \dfrac{1}{2}$; $f'_y(2, 1) = 0$

21) $f(x, y, z) = \log(xy + z)$ olduğuna göre $f'_x(1, 2, 0)$, $f'_y(1. 2, 0)$, $f'_z(1, 2, 0)$ değerlerini bulunuz.

Cevap. $f'_x(1, 2, 0) = 1$, $f'_y(1, 2, 0) = \dfrac{1}{2}$, $f'_z(1, 2, 0) = \dfrac{1}{2}$

22) $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

yı hesaplayınız.

Cevap. r

23) $z = \log(x^2 + xy + y^2)$ ise

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

olduğunu gösteriniz.

24) $z = xy + x\, e^{y/x}$ ise

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

olduğunu gösteriniz.

25) $u=(x-y)(y-z)(z-x)$ ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

olduğunu gösteriniz.

26) $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$ ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$$

olduğunu gösteriniz.

27) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ise $z=z(x, y)$ yi belirtiniz.

Cevap. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+h(x)$

28) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2+y^2}{x}$ ve $x=1$ için $z(x, y)=\sin y$ ise $z=z(x, y)$ yi belirtiniz.

Cevap. $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2\log x+\sin y-\dfrac{1}{2}$

YÜKSEK MERTEBEDEN KISMÎ TÜREVLER.

29) $z=c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$ den $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{abc\,y^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{abc\,xy}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{abc\,x^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$$

30) $z=\log(x^2+y^2)$ den $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

31) $z=\sqrt{2xy+y^2}$ den $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ yi hesaplayınız,

Cevap. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$

32) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ den $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$

33) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ den $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{r^2 - x^2}{r^3}$

34) $u = x^{\alpha}\, y^{\beta}\, z^{\gamma}$ dan $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial y\, \partial x}$ i hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial y\, \partial x} = \alpha\, \beta\, \gamma\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, z^{\gamma-1}$

35) $z = \sin(xy)$ den $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = -x^2 y \cos(xy) - 2x \sin(xy)$

36) $z = \arcsin \sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ olduğunu gösteriniz.

37) $z = x^y$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ olduğunu gösteriniz.

38) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ fonksiyonun $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

39) $u(x, t) = A \sin(a \lambda t + \alpha) \sin \lambda x$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

40) $z = x\, \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ fonksiyonunun

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

41) $u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\; \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ fonksiyonunun

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

BİLEŞİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ.

42) $z = \frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \log t$ ise $\frac{dz}{dt}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t (t \log t - 1)}{t (\log t)^2}$

43) $u = \log \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$ ise $\frac{du}{dt}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{cotg} \frac{x}{\sqrt{y}} \left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$

44) $u = xyz$, $x = t^2 + 1$, $y = \log t$, $z = \operatorname{tg} t$ ise $\frac{du}{dt}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{du}{dt} = 2t \log t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2+1) \operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2+1) \log t}{\cos^2 t}$

45) $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = H$ ise $\frac{du}{dt}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{du}{dt} = 0$

46) $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \cos x$ ise $\frac{dz}{dx}$ i hesaplayınız.

Cevap. $\frac{dz}{dx} = (\sin x)^{\cos x} (\cos x \operatorname{cotg} x - \sin x \log \sin x)$

47) $z = f(u, v)$, $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$ ise $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} + y\, e^{xy} \frac{\partial f}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y \frac{\partial f}{\partial u} + x\, e^{xy} \frac{\partial f}{\partial v}$

48) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; $x = u \sin v$, $y = u \cos v$ ise $\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$

49) $w = f(u, v)$, $u = x + at$, $v = y + bt$ ise

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}$$

olduğunu gösteriniz.

50) $z = y\,\varphi(x^2 - y^2)$ fonksiyonunun $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ denklemini sağladığını gösteriniz.

51) $z = xy + x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ fonksiyonunun $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ denklemini sağladığını gösteriniz.

52) $z = e^y\,\varphi(y\cdot e^{x^2/2y^2})$ fonksiyonunun $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$ denklemini sağladığını gösteriniz.

53) $z = f(u, v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ ise $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ türevlerini hesaplayınız.

54) $u = f(x, y, z)$ ve $z = \varphi(x, y)$ ise $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevini hesaplayınız.

Cevap. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

TOPLAM DİFERANSİEL.

55) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$ olduğuna göre $f(x, y) = x^2 y$ fonksiyonunun (1, 2) noktasındaki artımını ve toplam diferansielini bulunuz.

Cevap. $\Delta f = 14$; $df = 6$

56) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ fonksiyonunun toplam diferansielini hesaplayınız.

Cevap. $dz = 3(x^2 - y)\,dx + 3(y^2 - x)\,dy$

57) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$ fonksiyonunun toplam diferansielini hesaplayınız.

Cevap. $dz = \sin 2x\,dx - \sin 2y\,dy$

58) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ fonksiyonunun toplam diferansielini hesaplayınız.

Cevap. $dz = 0$

59) $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$ ise $df(1, 1)$ i hesaplayınız.

Cevap. $df(1, 1) = dx - 2\,dy$

60) $u = xyz$ fonksiyonunun toplam diferansielini hesaplayınız.

Cevap. $du = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$

61) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{z^2}$ fonksiyonunun toplam diferansielini hesaplayınız.

Cevap. $du = \dfrac{z^2}{x^2 y^2 + z^4} \left(y\,dx + x\,dy - \dfrac{2xy}{z}\,dz \right)$

62) $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ise $df(3, 4, 5)$ i hesaplayınız.

Cevap. $df(3, 4, 5) = \dfrac{1}{25}\,(5\,dz - 3\,dx - 4\,dy)$

63) $z = e^{xy}$ ise d^2z i hesaplayınız.

Cevap. $d^2z = e^{xy}[(y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy]$

64) $u = xyz$ ise d^2u yu hesaplayınız.

Cevap. $d^2u = 2(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$

65) $z = \varphi(t)$, $t = x^2 + y^2$ ise d^2z i hesaplayınız.

Cevap. $d^2z = 4\,\varphi''(t)\,(x\,dx + y\,dy)^2 + 2\,\varphi'(t)\,(dx^2 + dy^2)$

66) $z = e^x \cos y$ ise d^3z i hesaplayınız.

Cevap. $d^3z = e^x\,(\cos y\,dx^3 - 3\sin y\,dx^2\,dy - 3\cos y\,dx\,dy^2 + \sin y\,dy^3)$

67) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\log x - 10\log y$ ise $df(1, 2)$ ve $d^2f(1, 2)$ yi hesaplayınız.

Cevap. $df(1, 2) = 0$; $d^2f(1, 2) = 6\,dx^2 + 2\,dx\,dy + 4{,}5\,dy^2$

68) $(\cos x + 3x^2y)\,dx + (x^3 - y^2)\,dy$ nin tam diferansiel olduğunu gösteriniz.

69) $\dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2}\,dx - \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}\,dy$ nin tam diferansiel olduğunu gösteriniz,

70) Bir dik dörtgenin kenarlarından biri $a = 10$ cm, diğeri $b = 24$ cm dir. a kenarı 4 mm uzatılır ve b kenarı 1 mm kısaltılırsa l köşegeninin değişimini yaklaşık olarak hesaplayınız ve sonucu tam değerle mukayese ediniz.

Cevap. $dl = 0{,}062$ cm , $\Delta l = 0{,}065$ cm

71) 2 mm kalınlığında kontrplaktan yapılmış ve dış boyutları 10 cm , 8 cm , 6 cm olan bir kutunun kontrplak kısmının hacminin yaklaşık değerini bulunuz.

Cevap. 75 cm^3

72) $(1{,}02)^3\,(0{,}97)^2$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.

Cevap. 1,00

73) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.

Cevap. 4,998

74) $\sin 32^0 \cos 59^0$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.

Cevap. 0,273

75) $\sqrt{1 + (2{,}98)\,(5{,}03)}$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.

Cevap. 3,99875

76) $\sqrt{(5{,}98)^2 + (8{,}01)^2}$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.

Cevap. 9,996

77) $\dfrac{(2{,}06)^2 + (3{,}95)^2}{(1{,}92)^2}$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.

Cevap. 5,36

78) $[(3{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + (6{,}02)^2 + 5(1{,}97)^2]^{-(1/2)}$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.

Cevap. 0,111427

79) $\sqrt[5]{(3{,}8)^2 + 2(2{,}1)^3}$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.

Cevap. 2,01

80) Gazların genel kanunu $p\,v = R\,T$ bağıntısı ile verilmiştir. Bir gazın p basıncı ile v hacmı %3 er bağıl hata ile biliniyor ise T nin hesabında yapılacak maksimum bağıl hatayı bulunuz.

Cevap. %7

81) Bir cismin ρ yoğunluğu, havadaki ağırlığı P_1 ve su içindeki ağırlığı P_2 olmak üzere, $\rho = \dfrac{P_1}{P_1 - P_2}$ formülü ile hesaplanıyor. P_1 , 0,01 kg ve P_2 de 0,02 kg lık birer hata ile $P_1 = 9$ kg ve $P_2 = 5$ kg olarak ölçülüyorlar. ρ nun hesaplanan değerinde yapılan maksimum hatayı bulunuz.

Cevap. %1,44

82) Serbest düşen bir cismin t saniyede aldığı yol $h = \frac{1}{2} g t^2$ dir t zamanı $\frac{1}{5}$ saniyelik bir hata ile 10 saniye olarak ölçülmüş ve g nin değeri de %0,1 bağıl hatası ile biliniyor ise h ın hesabında yapılacak bağıl hatayı bulunuz.

Cevap. %4,1

83) Bir dik dörtgenler prizmasının kenarları $\frac{1}{8}$ cm hata ile 3, 4, 5 dm olarak ölçülmüştür. Bu kutunun hacmının hesabında yapılacak bağıl hatayı bulunuz.

Cevap, %0,1

84) Bir ABC dik üçgeninin dik kenarları $\pm 0{,}1$ cm hata ile $a = 5{,}7$ cm ve $b = 8{,}3$ cm olarak ölçülmüştür. tg A nın tg $A = \frac{a}{b}$ den hesabında yapılacak maksimum hatayı bulunuz.

Cevap. %3

85) Bir dik silindirin çap ve yüksekliği 0,05 cm bir hata ile 8 ve 12,5 cm olarak ölçülmüştür. Bu silindirin hacmının hesabında yapılması mümkün maksimum hatayı bulunuz.

Cevap. 3,3 π

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ.

86) $y = 1 + y^x$ den $\frac{dy}{dx}$ i hesaplayınız.

Cevap. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \log y}{1 - x y^{x-1}}$

87) $y = x + \log y$ den $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(1-y)^3}$

88) $\log \sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ $(a \neq 0)$ dan $\frac{dy}{dx}$ i hesaplayınız.

Cevap. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + ay}{ax - y}$

89) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ den $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}$

90) $f(x, y, z) = 0$ ise $\dfrac{\partial x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$ olduğunu gösteriniz.

91) $u + v = x + y$, $x\,u + y\,v = 1$ ise $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ yi hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{u + y}{x - y}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{u + x}{x - y}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{v + y}{x - y}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{v + x}{x - y}$

92) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ $(u \neq v)$ den $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -3\,u\,v$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3}{2}\,(u + v)$

DEĞİŞKEN DÖNÜŞTÜRMELERİ ve JOKOBİENLER

93) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$ denkleminde $x = e^t$ değişken dönüştürmesini yapınız.

Cevap. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 0$

94) $(1 - x^2) \dfrac{d^2y}{dx^2} - x \dfrac{dy}{dx} = 0$ denkleminde $x = \cos t$ değişken dönüştürmesini yapınız.

Cevap. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$

95) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ denklemini y yi bağımsız değişken kabul ederek dönüştürünüz.

Cevap. $\dfrac{d^2x}{dy^2} - 2y \dfrac{dx}{dy} = 0$

96) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ denkleminde $u = x$, $v = x^2 + y^2$ bağıntıları ile tanımlı u ve v değişken dönüştürmesini yapınız.

Cevap. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$

97) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z = 0$ denkleminde $u = x$, $v = \dfrac{y}{x}$ değişken dönüştürmesini yapınız.

Cevap. $u\dfrac{\partial z}{\partial u} - z = 0$

98) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ denkleminde $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ değişken dönüştürmesini yapınız.

Cevap. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$

99) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ denkleminde $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$ değişken dönüştürmesini yapınız.

Cevap. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u} = \dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial z}{\partial v}$

100) $F(x, y, u, v) = 0$, $G(x, y, u, v) = 0$ ise $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ türevlerini hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{D(F, G)}{D(x, v)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{D(F, G)}{D(u, x)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{D(F, G)}{D(y, v)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{D(F, G)}{D(u, y)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}$

101) $f(x, y, z) = 0$ ve $g(x, y, z) = 0$ ise

$$\frac{dx}{\dfrac{D(f, g)}{D(y, z)}} = \frac{dy}{\dfrac{D(f, g)}{D(z, x)}} = \frac{dz}{\dfrac{D(f, g)}{D(x, y)}}$$

olduğunu gösteriniz.

102) $x = u - v + w$, $y = u^2 - v^2 - w^2$ ve $z = u^3 + v$ ise

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(u,\ v,\ w)}$$

yi hesaplayınız.

Cevap. $\dfrac{D(x,\ y,\ z)}{D(u,\ v,\ w)} = 6wu^2 + 2u + 6u^2v + 2w$

103) $f,\ g,\ h$ lar $x,\ y,\ z$ lerin fonksiyonları olduğuna göre

$$\frac{D(f,\ g,\ h)}{D(x,\ y,\ z)} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{D(g,\ h)}{D(y,\ z)} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{D(h,\ f)}{D(y,\ z)} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{D(f,\ g)}{D(y,\ z)}$$

olduğunu gösteriniz.

104) $f,\ g,\ h$ lar $x,\ y,\ z$ lerin fonksiyonları ve

$$x = F(u,\ v) \quad , \quad y = G(u,\ v) \quad , \quad z = H(u,\ v)$$

iseler

$$\frac{D(f,\ g)}{D(u,\ v)} = \frac{D(f,\ g)}{D(y,\ z)}\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)} + \frac{D(f,\ g)}{D(z,\ x)}\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)} + \frac{D(f,\ g)}{D(x,\ y)}\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$$

olduğunu gösteriniz.

TEĞET, NORMAL ve ZARF.

105) Parametrik denklemleri $x = \sin t$, $y = \sin t$, $z = \cos 2t$ eğrisinin $t = \dfrac{\pi}{4}$ e karşılık olan noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz

Cevap. $\dfrac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{z}{-4}$

106) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 8z^2 = 0$ eğrisinin $(2,\ 2,\ 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Cevap. $x + y = 4$, $z = 1$

107) $z = x^2 + y^2$ yüzeyinin $(1,\ -2,\ 5)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normalinin denklemini bulunuz.

Cevap. $2x - 4y - z - 5 = 0$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$

108) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ konisinin $(4,\ 3,\ 4)$ noktasındaki teğet düzlemi ile normalinin denklemlerini bulunuz.

Cevap. $3x + 4y - 6z = 0$; $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$

109) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ yüzeyinin $x + 4y + 6z = 0$ düzlemine paralel teğet düzlemlerinin denklemlerini bulunuz.

Cevap. $x + 4y + 6z = \mp 21$

110) $(x - a)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$ çember ailesinin zarfının denklemini bulunuz.

Cevap. $y = \pm x$

111) Koordinat eksenleri ile alanı S gibi sabit bir değere eşit üçgen teşkil eden doğruların zarfını bulunuz.

Cevap, $xy = \dfrac{1}{2} S$

112) m parametre olarak $y = mx + \dfrac{p}{m}$ doğru ailesinin zarfını bulunuz.

Cevap. $y^2 = 4px$

113) Alanları sabit ve A değerine eşit olan bütün $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipslerinin zarfının denklemini bulunuz.

Cevap. $xy = \pm \dfrac{A}{2\pi}$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA TAYLOR FORMÜLÜ.

114) $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ olduğuna göre $f(x + h\,,\, y + k)$ nın h ve k nın tam ve pozitif kuvvetlerine göre açılımını bulunuz.

Cevap. $f(x + h\,,\, y + k) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(ax + by)\,h +$

$2(bx + cy)\,k + ah^2 + 2bhk + ck^2$

115) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ fonksiyonuna $(-2, 1)$ noktası civarında Taylor formülünü uygulayınız.

Cevap. $f(x, y) = 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)\,(y - 1) + 3(y - 1)^2$

116) $f(x, y) = e^x \sin y$ fonksiyonuna Maclaurin formülünü uygulayınız. (3. mertebe türevin bulunduğu terime kadar yazılacak)

Cevap. $y + xy + \dfrac{3x^2y - y^3}{3!}$

117) $f(x, y) = \cos x \cos y$ fonksiyonuna Maclaurin formülünü uygulayınız. (4. mertebe türevin bulunduğu terime kadar yazılacak)

Cevap. $1 - \frac{x^2+y^2}{2!} + \frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA MAKSİMUM ve MİNİMUM.

118) $z=(x-1)^2+2y^2$ fonksiyonunun maksimum, minimum değerlerini bulunuz.

Cevap. $x=1$ $y=0$ için $z_{min}=0$

119) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$ fonksiyonunun maksimum, minimum değerlerini bulunuz.

Cevap. $x=1$, $y=0$ için $z_{min}=-1$

120) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ fonksiyonunun maksimum, minimum değerlerini bulunuz.

Cevap. $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ ve $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ için $z_{min}=-8$
$x=y=0$ ekstremum değildir.

121) $z=1-(x^2+y^2)^{2/3}$ fonksiyonunun maksimum, minimum değerlerini bulunuz.

Cevap. $x=y=0$ için $z_{maks}=1$

122) $z=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ fonksiyonunun maksimum minimum değerlerini bulunuz.

Cevap. $x=1$, $y=-1$ için $z_{maks}=\sqrt{3}$

123) $z=x^3y^2(a-x-y)$ fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz.

Cevap. $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a}{3}$ için maks.

124) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ olarak $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz.

Cevap. $x=y=\frac{\pi}{3}$ için maks.

125) $0 \leq x \leq \pi$; $0 \leq y \leq \pi$ olarak $z=\sin x \sin y \sin(x+y)$ fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz.

Cevap. $x=y=\frac{\pi}{3}$ için maks.

İkinci cildin sonu

INDEKS

A

B

C, Ç

D

E

F

G

H

I, İ

J

K

M

N

O

P, R

S, Ş

T

U

Y

Z

BİBLİYOGRAFYA

DEMIDOVITCH, B.	Recueil d'éxercices et de problémes d'analyse mathématique
DİLGAN, Hamit	Analiz II
KAPLAN, Wilfred	Advanced Calculus
KELLS, Lyman M.	Calculus
KLÉTÉNİK, D.	Problémes de géometrie analytique
MASSART, J.	Cours d'analyse
MILHAUD, G. et POUGET, E.	Cours de géometrie analytique
PAPELIER, G.	Précis d'algébre d'analyse et de trigonométrie
PISKOUNOV, N.	Calcul différantiel et integral
POUSSIN, C.J. Della Vallée BERKER, Ratıp	Analiz dersleri
PROTTER, Murray H. - MORREY C.B.Jr.	Modern mathematical analysis
QUINET, J.	Cours élémentaire de mathématiques supérieures
SPIGEL, Murray R.	Advanced calculus
SPIGEL, Murray R.	Complex variables
VESSIOT, E. et MONTEL, P.	Cours de mathématiques générales
WOODS - BAILEY - SALLIN, A.	Mathématiques générale

YÜKSEK MATEMATİK
Cilt 1

(İçerdiği Konular)

1. BÖLÜM Sayı, Değişken, Fonksiyon
2. BÖLÜM Limit ve Süreklilik
3. BÖLÜM Türev
4. BÖLÜM Türevin çeşitli uygulamaları
5. BÖLÜM Ters trigonometrik fonksiyonlar
6. BÖLÜM Üstel fonksiyon ve logaritma fonksiyonu
7. BÖLÜM Hiperbolik fonksiyonlar
8. BÖLÜM Parametrik denklemler
9. BÖLÜM Kutupsal koordinatlar
10. BÖLÜM Sonsuz küçükler
11. BÖLÜM Diferansiel
12. BÖLÜM Eğrilik, Eğrilik yarıçapı, Eğrilik dairesi, Basıt, Mebsut
13. BÖLÜM Ortalama teoremi, Taylor ve Maclaurin formülleri, Belirsiz şekiller
14. BÖLÜM Belirsiz integral
15. BÖLÜM Belirli integral